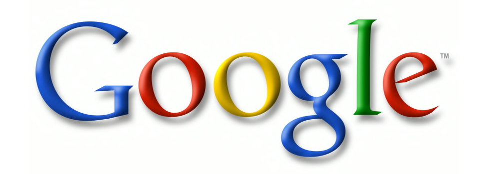
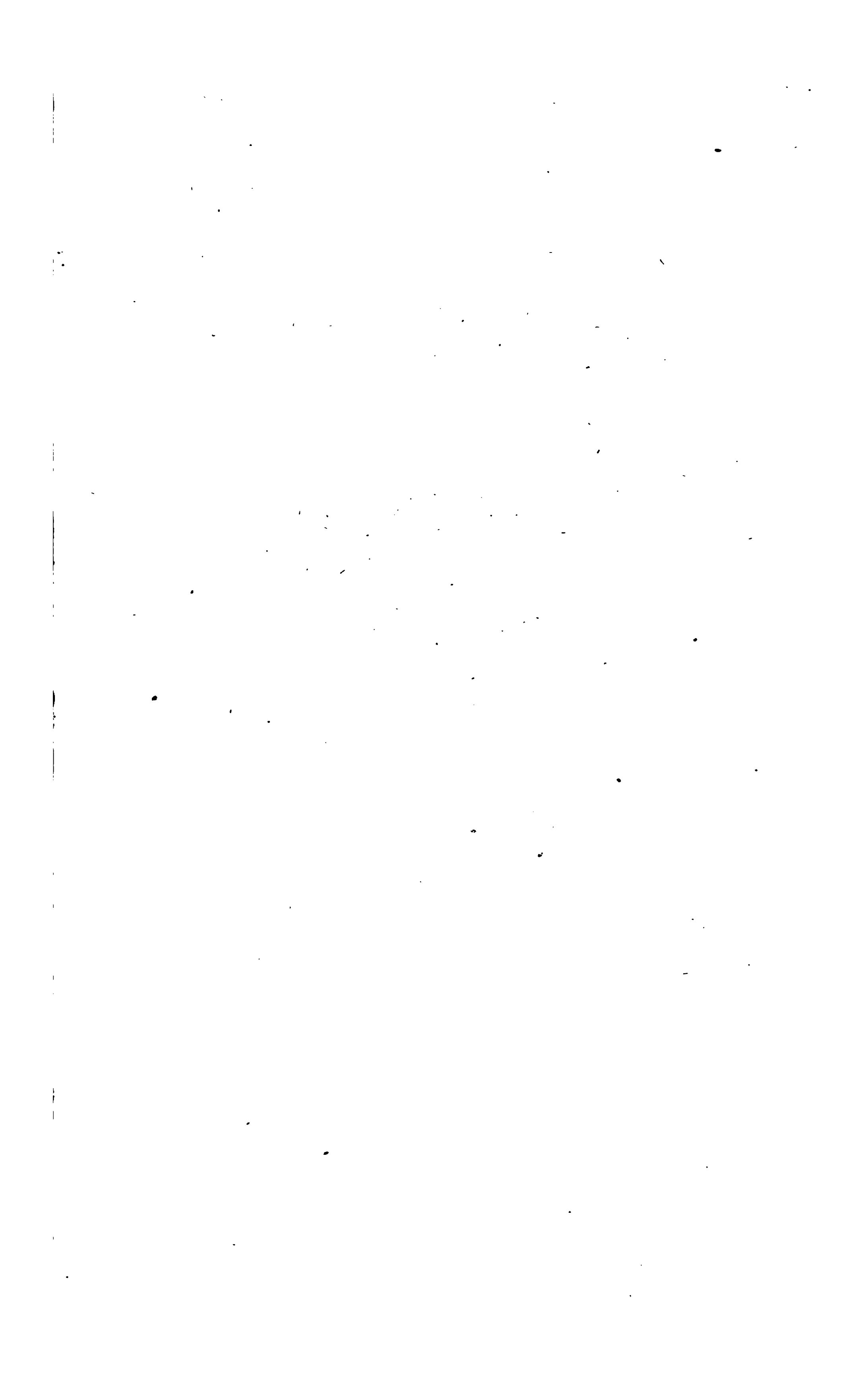
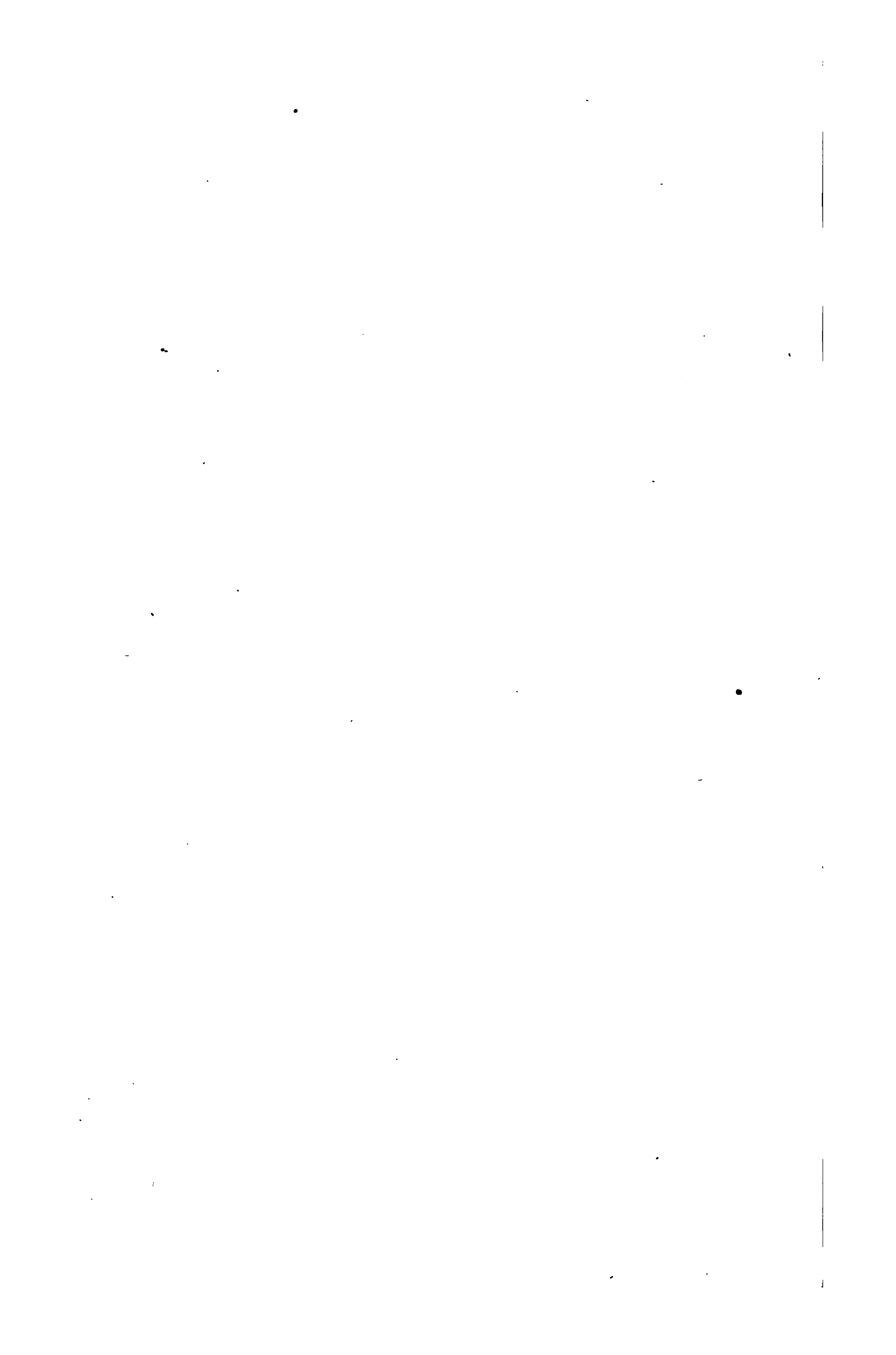



Phil
5243
10.2


SIGILLVM ACADEMIÆ HARVARDIANÆ IN NOV: ANG: CHRISTO ET ECCLESIÆ


SIGILLVM ACADEMIÆ HARVARDIANÆ IN NOV: ANG: CHRISTO ET ECCLESIÆ





ERSTE GRUNDLEHREN

DER

MATHEMATISCHEN PSYCHOLOGIE

VON

MORITZ WILHELM DROBISCH.

Mit einer Figurentafel.

LEIPZIG,
LEOPOLD VOSS.
1850.

In der Psychologie können wir bei dem Mangel oder doch der Schwierigkeit bestimmter Beobachtungen weniger darauf ausgehen, irgend ein wirkliches und individuelles Ereigniss genau zu erkennen und zu erklären, als die einfachen Gesetze einzusehen, deren höchst mannichfaltige Verflechtung die Wirklichkeit bestimmt.

Herbart, Psych. als Wiss. B. I. S. 197.

Vorrede.

Ein volles Viertel des Jahrhunderts ist seit dem Erscheinen von Herbart's «Psychologie als Wissenschaft, neu gegründet auf Erfahrung, Metaphysik und Mathematik», verflossen, des Werkes, das zuerst die Grundlinien der mathematischen Psychologie in systematischem Zusammenhang darlegte. Konnten die früheren Abhandlungen, in denen Herbart nur vorläufige Auskunft über die Principien seiner Lehre gegeben und mehr durch die That die Wichtigkeit einer Verbindung der Mathematik mit der Psychologie zu beweisen versucht hatte, in Folge des Mangels der zu ihrem klaren Verständniss erforderlichen Prämissen, nicht leicht Eingang finden, so schienen nun diese Hindernisse beseitigt, und die Neuheit und Bedeutsamkeit der Unternehmung lockend genug, um eine Theilnahme aller zur Würdigung derselben Befähigten hoffen zu lassen. Diese Hoffnung ist jedoch nicht in Erfüllung gegangen. Es mag zwar nicht verkannt werden, dass Herbart's Versuch, die Psychologie zu reformiren, in mehr als einer Beziehung Erfolg gehabt hat. Seine Bekämpfung der Lehre von den Seelenvermögen ist nicht vergebens gewesen, denn schwerlich wird sich diese Hypothese noch einmal zu der vorigen Herrschaft erheben. Nicht umsonst hat er die psychische Beobachtung

auf die Phänomene hingewiesen, die allein wirkliche Thatsachen der innern Erfahrung und nicht, wie vieles Andre, wovon die Psychologie sonst wie von Thatsachen zu reden pflegte, vorgefasste Ansichten sind. Auch seine Analyse und Erklärung dieser Phänomene aus den Principien der Association und Reproduction hat Anerkennung gefunden, theils offene, die sich zu der Quelle bekannte, theils verhüllte, die durch neue Worte und verflachte Begriffe sich den Anschein der Eigenthümlichkeit zu geben versuchte. Dagegen hat der mathematische Theil von Herbart's Theorie des geistigen Lebens weder bei den Psychologen noch bei den Mathematikern sich einer günstigen Aufnahme zu erfreuen gehabt, und als Beweis von thätiger Theilnahme an der Sache ist ausser einer Reihe akademischer Programme des Verfassers der vorliegenden Schrift nur noch eine Abhandlung von Th. Wittstein zu nennen.

Liegt nun der Grund dieser Ungunst zum Theil wohl darin, dass es den meisten Psychologen an der nöthigen mathematischen Vorbildung und Uebung, den Mathematikern an psychologischen Kenntnissen und selbst an Interesse dafür fehlen mochte, so erklärt dies doch noch nicht Alles. Die Mathematiker insbesondre fassten bald ein Vorurtheil gegen eine Theorie, deren Resultate nicht einer Controle durch Messung sich unterziehen lassen. Herbart hatte es noch nicht nachdrücklich genug ausgesprochen, dass seine mathematische Psychologie eigentlich erst eine abstracte Vorbereitung zu einer künftigen Theorie der durch die innere Erfahrung gegebenen Erscheinungen ist; er strebte vielleicht zu frühzeitig, den synthetischen Theil seiner Untersuchungen mit dem analytischen in Verbindung zu bringen, was doch nur in lockerer Weise geschehen konnte, so dass es damit weder gelang, die empirische Gültigkeit der mathematischen Formeln exact nachzuweisen, noch die Unentbehrlichkeit einer mathematischen Theorie zur Erklärung der psychischen Phänomene genügend darzuthun. Indessen würde ein etwas tiefer eingehendes Studium der dargebotenen Lehren sehr bald von selbst auf die richtige Würdigung des Verhält-

nisses der mathematischen Psychologie zu der empirischen geführt haben. Aber dieses hatte Schwierigkeiten, die den Mathematikern zu fremdartig waren, als dass sie hätten geneigt sein können, sich mit ihrer Ueberwindung zu befassen. Herbart führte zur Psychologie nicht blos über den festen Boden der Erfahrung und auf dem sicheren Pfade der Mathematik, sondern auch durch die enge Pforte der Metaphysik, und diese versperrte Vielen den Eingang, ja selbst die Lust einzudringen. Zwar auch dieses war nur ein Vorurtheil. Herbart hat mehr als einmal mit klaren Worten darauf hingewiesen, dass die Principien der mathematischen Psychologie, wenn auch von ihm selbst durch metaphysische Speculation gefunden, doch sich ganz wohl als eine blosse naturwissenschaftliche, der mathematischen Entwickelung fähige Hypothese betrachten lassen, und er stützte hierauf die Hoffnung, dass allmälig die Mathematiker sich dieses Zweigs der Psychologie bemächtigen und ihm eine fruchtbare Ausbildung geben würden. Indess, wer auch bis zu dieser Einsicht vorgedrungen ist und Herbart's sämmtlichen mathematisch-psychologischen Arbeiten ein ernstes Studium zugewendet hat, wird doch bald zu der Ueberzeugung gekommen sein, dass es sich hier zunächst noch nicht um einen rüstigen Fortbau, sondern zuvor um eine vorsichtige Prüfung und selbst vielleicht einen Umbau der Fundamente handle. Denn sehr bald lernt man die lichtvolleren Partien von den dunkleren, die genügend begründeten Lehren von den schwachen Stellen unterscheiden. Diese Mängel liegen zum Theil nur in der Darstellung, zum Theil aber haben sie tiefere Wurzeln. Die Aufgabe ist daher nicht blos die, sich eine fertige Wissenschaft durch Studium anzueignen, sondern, wo es nöthig ist, zur Vervollkommnung derselben selbst Hand anzulegen. Dazu gehört jedenfalls ein lebhaftes Interesse an der Sache und eine feste Ueberzeugung von ihrer Wichtigkeit und Ausführbarkeit. Das Gelingen hängt aber, wie es scheint, nicht sowohl von grosser mathematischer Virtuosität als von der Kunst ab, für die psychischen Phänomene hypothetische Erklä-

rungsgründe aufzufinden, die der mathematischen Auffassung und Entwicklung in möglichst einfacher und natürlicher Weise zugänglich sind. Was Herbart für diesen Zweck geleistet hat, steht als ein Denkmal bewunderungswürdigen Scharfsinns und seltener Ausdauer da. Seine Beschäftigung mit der mathematischen Psychologie umfasst einen Zeitraum von mehr als vierzig Jahren, der erst mit seinem letzten Lebenshauche abschliesst. Mag auch Manches in seiner Theorie mangelhaft in der Begründung, lückenhaft in der Ausführung, ungenügend in der Darstellung sein, das Ganze stellt doch die Thatsache dar, dass unsre wechselnden geistigen Zustände einer consequent zusammenhängenden mathematischen Untersuchung zugänglich sind, welche zu Resultaten führt, die unverkennbar mit den Phänomenen, die wir in uns wirklich beobachten, zusammentreffen. Diese Thatsache verdient schon allein, ganz abgesehen von der materiellen Wahrheit der aufgestellten Theorie, eine grosse Entdeckung genannt zu werden; denn wer hat vor Herbart auch nur geahnet, dass die Mathematik in der Psychologie einen Wirkungskreis finden könne? Ein einzelnes psychisches Phänomen in eine mathematische Formel einzukleiden, möchte mit Recht nur als ein müssiges Spiel des Witzes betrachtet werden. Ein ganzer Complex von Lehren aber, die sich gegenseitig tragen und bestätigen, muss mehr sein als ein blosser täuschender Schein; und wenn in ihm noch nicht die volle Wahrheit selbst enthalten ist, so muss doch der Fortschritt auf dieser Bahn zur Wahrheit führen.

Soll dies aber gelingen, so muss der Zugang zu der mathematischen Psychologie erleichtert werden, damit gerade solche Kräfte, die bisher von ihr fern gehalten wurden, sich an ihrer Fortbildung betheiligen können. Diesen Zweck soll nun vor allem Andern die vorliegende Schrift befördern helfen. Ihr Verfasser kam vor zweiundzwanzig Jahren mit Herbart durch eine Recension von dessen Abhandlung: *de attentionis mensura,* in unmittelbare Berührung, die bald zu einem lebhaften wissenschaftlichen Verkehr und einem befreundeten per-

sönlichen Verhältnisse führte. Seit jener Zeit suchte er sich die mathematische Psychologie zuerst in der ihr von Herbart gegebenen Form anzueignen, und da er hierbei nicht volle Befriedigung finden konnte, so machte er mancherlei Versuche, sie auf andere Principien zu gründen, die jedoch wenigstens zu keiner durchgreifenden Umgestaltung geführt haben. Dass er sich durch die Darstellung, welche in der gegenwärtigen Schrift die mathematische Psychologie erhalten hat, vollständig Genüge zu leisten vermocht hätte, darf er nicht behaupten, denn es sind ihm die Ansprüche sehr wohl bekannt, die man an eine mathematische Arbeit zu machen berechtigt ist; aber es war hier nicht ein längst angebauter, vielfach durchfurchter, sondern ein eben erst der Cultur gewonnener Boden neu zu bestellen. Indess, eine gewisse subjective Reife hat die Schrift erlangt; denn der Verfasser hat ihren Inhalt so vielfach durchdacht und umgearbeitet, dass er, wenigstens ohne neue Anregung von Aussen her, der Hoffnung entsagt, der Sache noch eine andre Seite abzugewinnen.

Nur ein Theil der mathematischen Psychologie wird hier in einer neuen Bearbeitung dargeboten, die sich sowohl in der Form der Begründung als in der Behandlungsweise, zum Theil selbst in den Resultaten, von Herbart's Lehre unterscheidet. Der Umfang des Gegebenen ist jedoch gross genug, um einem tiefer eingehenden Studium als Grundlage dienen zu können. Herbart's hierher gehörige Schriften verdrängen zu wollen, lag auf keine Weise in der Absicht des Verfassers, die vielmehr dahin geht, ihnen eine erneute Aufmerksamkeit zuzuwenden. Ein Mehreres jetzt schon vorzulegen, könnte überdies voreilig scheinen; denn es ist erst abzuwarten, ob überhaupt in der Gegenwart mehr Theilnahme für diese Untersuchungen vorhanden ist als früher, und ob dann insbesondre diese neue Art der Auffassung von Sachverständigen als ein Fortschritt oder Rückschritt betrachtet werden wird. Was die Abweichungen in den Resultaten betrifft, so mag vorzugsweise auf den Inhalt des vierten und sechsten Abschnitts hingewiesen werden. Weder

hier aber, noch in den Abweichungen, die sich auf die Begründung beziehen, ist auf Herbart vergleichende Rücksicht genommen worden. Das Buch würde dadurch eine polemische Färbung bekommen haben, die ihm, nicht aus blossen Rücksichten der Pietät, sondern um seiner eignen Lesbarkeit willen fremd bleiben sollte. Wer dasselbe mit Herbart's Werken vergleichen will, dem werden die Gründe nicht entgehen, welche zu den vorgenommenen Veränderungen drängten. Eine kurze Andeutung derselben würde nutzlos, eine ausführliche Darlegung störend gewesen sein. — Der Verfasser hat sich bemüht, die Grundbegriffe mit möglichster Klarheit zu entwickeln, was bei einer Doctrin, die sich nicht auf unmittelbare Thatsachen der Anschauung berufen kann, doppelt nöthig ist. Dennoch wird es ihn nicht wundern, wenn er seine Leser nicht immer zu befriedigen vermag. Lässt sich doch selbst an den Grundbegriffen und Grundsätzen der reinen Mathematik gar Manches aussetzen und nicht weniger an vielen Beweisen der wichtigsten Lehrsätze. Wie viele unfruchtbare Versuche sind gemacht worden, das elfte Axiom des Euklides zu beseitigen, wie viel ist über das Unendlichkleine gestritten worden! Wie spät hat man von vielen, durch eine unvollständige Induction aufgefundenen Haupttheoremen, z. B. dem Fundamentalsatz der Theorie der höhern Gleichungen, dem Harriot'schen Lehrsatz, dem Parallelogramm der Kräfte, dem Princip der virtuellen Geschwindigkeit u. a. allgemeine und vollkommen strenge Beweise gefunden! Die Mathematik hat sich dadurch in ihrem Gange nicht aufhalten lassen. Sie hat das Problematische hypothetisch angenommen und ist muthig weiter fortgeschritten. Warum sollte die mathematische Psychologie im schlimmsten Falle dieses Beispiel nicht nachahmen dürfen? Das letzte Urtheil über sie wird sich am Ende doch mehr durch das, was sie zu leisten vermag, als durch die Meinung über die Unantastbarkeit ihrer Principien feststellen. Ob diese deducirte Grundsätze oder motivirte Annahmen sind, wird daran nicht viel ändern. Der Geist grosser Erfinder hat oft Principien anticipirt, für welche

das innerliche metaphysische Verständniss erst lange nachher aufging. Die Mathematik ist voll von belegenden Beispielen zu dieser Behauptung. Selbst das Gravitationsprincip muss hierher gerechnet werden, das, wie klar auch als Thatsache, doch seinem innern Grunde nach, wie Newton selbst anerkannte, viele seiner Nachfolger aber vergessen zu haben scheinen, ein Problem ist, dessen Lösung erst noch gefunden werden soll. Dass nun die mathematische Psychologie schon jetzt so glücklich wäre, ein Princip von ähnlicher Unumstösslichkeit und fruchtbarer Entwickelungsfähigkeit zu besitzen, sind wir weit entfernt behaupten zu wollen. Möglich, dass künftig unsre jetzigen Rechnungsweisen eben so unbeholfen und unzureichend, wie dem heutigen Astronomen die Ptolemäischen Epicyklen erscheinen werden. Aber es entwickelt sich nun einmal im menschlichen Geiste in der Regel erst allmälig das Vollkommene aus dem Unvollkommneren. Nur einem Newton gelang es, mit einem Wurfe mitten in das Ziel zu treffen, und ohne Copernicus und Kepler wäre dies vielleicht selbst ihm nicht gelungen. Einen Newton der Psychologie erwartete aber auch Herbart erst von der Zukunft. In der That steht die mathematische Psychologie zur Zeit noch gar nicht auf dem Standpunkte, wo es sich darum handelt, nach Art der Mechanik des Himmels eine «Mechanik des Geistes» zu construiren. Sie muss jetzt erst als blosse mathematische Wissenschaft, vom Einfachen zum Zusammengesetzteren aufsteigend, sich aus sich selbst entwickeln. Wie ohne des Apollonius Werk über die Kegelschnitte Kepler seine Gesetze nicht hätte entdecken können; wie Newton in den drei ersten Büchern seiner Principien zuvörderst die allgemeine Mechanik begründet und dann erst zur Erklärung der Himmelserscheinungen übergeht, so muss auch erst eine abstracte psychische Mechanik geschaffen werden, bevor von einer mathematischen Theorie der concreten Thatsachen der innern Erfahrung im strengen Sinne des Wortes die Rede sein kann. Aber freilich müssen die aus den abstracten Voraussetzungen mittels des Calculs gezogenen Resul-

tate wenigstens in allgemeinen Umrissen erkennen lassen, dass ihre weitere Entwickelung Einstimmung mit der innern Erfahrung verspricht. Die ganze jetzige mathematische Psychologie beruht auf der Annahme, dass gleichzeitig gegebene Vorstellungen von gleichartig verschiedener Beschaffenheit sich gegenseitig zu Hindernissen werden, sich ihrer Klarheit berauben, und dass die hieraus für alle unvermeidlich entstehende Verminderung ihrer Klarheit sich im Allgemeinen nach sehr verschiedenen, theils von den Unterschieden der Beschaffenheit, theils denen der Stärke der Vorstellungen abhängigen Verhältnissen auf die einzelnen Vorstellungen vertheilt. Die Grössenbestimmung dieser Klarheitsverminderung beruht sowohl bei Herbart als in der vorliegenden Darstellung nur auf indirecten Betrachtungen, die immerhin Manches zu wünschen übrig lassen. Es würde jedoch übereilt sein, ihr Ergebniss deshalb schon zu verwerfen; denn was sich daraus entwickeln lässt, führt zu so vielen zufriedenstellenden Resultaten, dass man annehmen muss, die Wahrheit werde damit wenigstens nahebei getroffen sein. Es lässt sich aber wohl denken, dass es einem künftigen Forscher gelingen könne, die unmittelbaren Wirkungen entgegengesetzter Vorstellungen auf einander in noch einfacherer und lichtvollerer Weise aufzufassen und dadurch entweder nur eine grössere Deutlichkeit in die Principien zu bringen oder eine ganz neue Anlage der Rechnungen zu gewinnen. Wie die physische Astronomie auf der Lösung des Problems der drei Körper, so beruht die Möglichkeit der mathematischen Psychologie auf der Lösung eines Problems, welches man das Problem der drei Vorstellungen nennen könnte, und das darin besteht, durch Rechnung zu bestimmen, welche Klarheitsveränderungen drei gleichzeitige Vorstellungen von gegebenen Intensitäten und Graden der Verschiedenheit (Gegensätzen) erleiden müssen. Die Lösung des Problems muss aber jedenfalls eine solche sein, durch welche die Möglichkeit erhellt, dass bei gewissen Verhältnissen der gegebenen Grössen eine der Vorstellungen vorübergehend oder dauernd von den andern

verdrängt werden, gänzlich aus dem Bewusstsein verschwinden kann. Denn dass dies wirklich geschieht, dass eine Vorstellung durch andre in Vergessenheit gebracht werden kann, ist Thatsache. Indess gerade diese Vergleichung mit der Astronomie, dem glänzendsten Theil der angewandten Mathematik, macht es nicht unwahrscheinlich, dass, wie einfach sich auch künftig die Principien und Rechnungsanlagen der mathematischen Psychologie gestalten mögen, sich diese doch auf ebenso verwikkelte Berechnungen wie die der Störungen der Planeten gefasst machen muss. Und warum sollten auch die Berechnungen der Bewegungen der Vorstellungen einfacher sein als die der Bewegungen der Himmelskörper, die, wenn ihre Halbmesser gegen ihre Entfernungen nicht verschwindend klein wären, wenn ein dichteres Medium den Himmelsraum erfüllte, unendlich verwickelter sein würden? Doch darüber kann nur die That, der wirkliche Angriff der Probleme entscheiden. Ein wesentlicher Unterschied zwischen den gesetzmässigen Bewegungen im Raume und den gesetzmässigen stetigen Klarheitsveränderungen unserer Vorstellungen wird aber bei jeder möglichen Umgestaltung der mathematischen Psychologie fest bestehen. Dies ist der, dass die Veränderungen in unserm Innern weder in periodischer Regelmässigkeit wiederkehren, noch in ununterbrochener Continuität aufeinander folgen. Hierdurch ist ihnen ein ganz andrer Charakter aufgeprägt als der, welcher bei weitem den meisten Erscheinungen in der äussern Natur zukommt. Und hierin liegt für Jeden, der seine Kräfte an der mathematischen Psychologie versuchen will, die Mahnung, sich bei seinen Untersuchungen nicht durch Analogien zu irgend welchen mathematisch-naturwissenschaftlichen Theorien leiten zu lassen, sondern nur von der Betrachtung und Analyse der psychologischen Data auszugehen. Die Schelling'sche Naturphilosophie ist noch in zu frischem Andenken, als dass es schon vergessen sein könnte, zu welchen oberflächlichen Vergleichungen und seichten Consequenzen das leichtsinnige Spiel mit Analogien führen, wie gänzlich es den gesunden Sinn verblenden und für die

richtige Auffassung der wahren Sachverhältnisse unempfänglich machen kann.

Seit jener Zeit, in der Herbart's grösseres psychologisches Werk erschien, hat sich in Deutschland ein grosser Reichthum mathematischer Kräfte entfaltet und die Mathematik eine viel weitere Verbreitung als früher gewonnen. Nur sehr mässige Kenntnisse in der Algebra und Analysis sind erforderlich, um den Inhalt des vorliegenden Buches zu verstehen, in welchem überdies durch zahlreiche Beispiele, numerische Tafeln und geometrische Darstellungen dem Bedürfniss von Lesern, die in der Auffassung allgemeiner Formeln minder geübt sind, entgegengekommen ist. Aber auch um als Mitarbeiter auf dem Felde der mathematischen Psychologie aufzutreten, bedarf es vor der Hand noch nicht neuer mathematischer Erfindungen, sondern nur einer gewissen Geschicklichkeit in der Anwendung des Bekannten auf die eigenthümlichen psychologischen Verhältnisse. Wie die algebraische Geometrie nicht blos in der Kunst besteht, aus geometrischen Aufgaben Gleichungen zu bilden und diese aufzulösen, sondern dazu auch noch die Construction der erhaltenen Formel gehört, so muss der mathematische Psycholog zuerst sich Aufgaben zu bilden, diese dann mathematisch zu lösen und endlich von den Resultaten wieder die psychologische Bedeutung zu erkennen wissen. Wer hierbei zu dem, was die gegenwärtige Schrift schon selbst darüber enthält, noch einer Nachhülfe bedarf, dem wird vielleicht des Verfassers «empirische Psychologie» von einigem Nutzen sein können; eine Schrift, die weder von metaphysischen Lehrsätzen ausgeht, noch die Mathematik zu Hülfe zieht, sondern nur durch Analyse von Thatsachen der innern Erfahrung zu einer hypothetischen Gesammtansicht von dem Zusammenhang der psychischen Phänomene zu gelangen und zu zeigen sucht, wie weit sich auf diesem Wege kommen lässt, ohne jedoch im mindesten leugnen zu wollen, dass die letzten Gründe einer Theorie des geistigen Lebens in der Metaphysik und die Mittel zu einer gründlichen Ausbildung einer solchen in der Mathe-

matik zu suchen sind.* Es ist aber von grosser Wichtigkeit, namentlich den Einfluss der Mathematik auf die Psychologie zu sichern und zu steigern. Denn sollte die letztere sich demselben wieder entziehen, so steht sehr zu befürchten, dass die Schärfe und Bestimmtheit der Begriffe, die Herbart in die Psychologie einzuführen bemüht war, bald wieder verloren gehen und einem oberflächlichen nebelhaften Theoretisiren weichen werde. Ja die Vorboten eines solchen Rückganges sind bereits da. Die Nothwendigkeit, bei der Erklärung der geistigen Phänomene quantitative Unterschiede zu berücksichtigen, ist von mehreren neuern psychologischen Schriftstellern zwar anerkannt, die Benutzung des Calculs aber zur nähern Bestimmung der Relationen der Quantitäten, auf die es dabei ankommt, abgelehnt worden. Dies ist eine Halbheit, die allerdings ihre grosse Bequemlichkeit hat; denn es ist leichter von Grössen im Allgemeinen zu reden als solche Beziehungen zwischen ihnen aufzufinden, durch welche eine Rechnung möglich wird. Auch hat dieses Verfahren den Vortheil, dem Aufstellen neuer Hypothesen ein weit leichteres Spiel zu gewähren, indem ohne Zuziehung des Calculs die Ungereimtheit oder Unfruchtbarkeit so manches angeblichen Erklärungsprincips verborgen bleibt. Aber eben dadurch, dass der Calcul allen Begriffsescamotagen ein Ziel setzt und mit unfehlbarer Gewissheit die Consequenzen zu Tage bringt, die in jeder ihm zugänglichen Voraussetzung verhüllt sind, wird er das vortreffliche Instrument zur Erforschung der Wahrheit, das durch kein andres zu ersetzen ist. Eine Hypothese auf eine allgemeine Formel bringen heisst schon, bevor noch von ihrer numerischen Uebereinstimmung mit Erfahrungsdatis die Rede ist, sie einer vorläufigen Prüfung unterziehen. Denn gar manche Gleichung zeigt aufgelöst imaginäre

* In äusserer Beziehung war es nöthig, durch ein solches Buch dem viel verbreiteten Vorurtheil entgegenzutreten, als sei Herbart's psychologische Grundansicht ohne Bekanntschaft mit seiner Metaphysik und ohne mathematische Kenntnisse gar nicht zu verstehen, und es scheint, dass dieser Zweck nicht unerreicht geblieben ist.

Wurzeln, oder negative, wo der Sinn der Aufgabe keine zulässt.

Möge diese Schrift, die hauptsächlich darauf ausgeht, die thätige Theilnahme Andrer für die mathematische Psychologie zu gewinnen, ohne vorgefasste Meinung aufgenommen, nach einem der Sache nicht fremden Maassstabe geprüft und beurtheilt, und bald durch eine vollkommenere Arbeit überflügelt werden. Der Verfasser wird mit Freuden bereit sein, jede bedeutendere Leistung anzuerkennen. Auf seichtes Feuilleton-Gerede über mathematische Psychologie, ohne Sachkenntniss, in der Art etwa, von welcher Herr Professor Rosenkranz vor Kurzem in der Halle'schen Monatsschrift eine wahrhaft ausgezeichnete und durch ihre Kennermiene höchst ergötzliche Probe geliefert hat, Rücksicht zu nehmen, wird Niemand verlangen, der weiss, was ernste Wissenschaft ist. Aber auch mit blossen Phantasien, wie die mathematische Psychologie wohl anders und besser sein oder werden könnte, ohne wirkliche Ausführung solcher guter Rathschläge, ist wenig gedient. Denn der Baum der Erkenntniss trägt weit mehr taube Blüthen von scheinbaren Einfällen als fruchtbringende Ideen, und selbst diese verlangen von ihrer Zeit Sonnenschein und Wärme, wenn sie zur Reife gedeihen sollen.

Inhalt.

Einleitung.

Die Selbstbeobachtung zeigt uns in unserm Innern einen rastlosen Wechsel der Erscheinungen. Nur kurze Zeit sind uns genau dieselben Vorstellungen gegenwärtig und auch da nicht mit gleichmässiger Klarheit und Bestimmtheit. Sehr bald lenkt sich die Aufmerksamkeit von ihnen ab auf andre, die sie verdrängen, sie werden dunkler, unbestimmter, verschwinden, das eine Mal allmälig, ein ander Mal plötzlich, oft zwar nur auf kurze Zeit, aber eben so oft auch auf lange; sie gerathen dann in Vergessenheit, sind so gut wie nicht vorhanden, bis begünstigende Umstände sie wieder hervorziehen und uns die Ueberzeugung geben, dass ihr Verschwinden keine Vernichtung war. Ebenso verhält es sich mit unsern Gefühlen, Affecten, Begehrungen. Sie dauern ungeschwächt und ununterbrochen nie lange. Sie können zwar, wie z. B. ein tiefer Seelenschmerz oder eine heftige Leidenschaft, sich im Laufe des Tages häufig erneuern; ein stetiges starres Beharren findet aber auch bei solchen vorzugsweise als bleibend bezeichneten Seelenzuständen nicht statt, denn in dem Leben des Geistes und Gemüths ist Nichts starr und unveränderlich, vielmehr Alles nur dem beweglichen leicht erregbaren Element des Flüssigen vergleichbar.

Die empirische Psychologie weist als die Erklärungsgründe dieses steten Wechsels zweierlei Ursachen nach. Einerseits werden durch die Empfindungen und Anschauungen von Aussen her unaufhörlich neue oder wenigstens theilweise neue Vorstellungen in der Seele erzeugt, an denen oft zugleich sinnliche Lust- und Schmerzgefühle haften; andrerseits ist jene

stete Veränderlichkeit durch die Natur unserer Seelenthätigkeit bedingt. Wenn wir uns in der bildlichen Sprache der Phänomene ausdrücken, so müssen wir es als eine Thatsache der innern Erfahrung bezeichnen, dass, indess in der Aussenwelt unzählig viele Körper neben einander Raum finden, in dem Raume des Bewusstseins immer nur für sehr wenige Vorstellungen gleichzeitig Platz gegeben ist; oder ohne Bild, dass die Seele immer nur sehr Weniges auf einmal mit Klarheit vorzustellen vermag. Die Unzahl aller übrigen Vorstellungen aber, deren wir uns im Augenblicke nicht bewusst, die uns nicht gegenwärtig sind, sehen wir als in der Tiefe der Seele aufbewahrte, als im latenten Zustand in ihr noch vorhandene an, als befähigt und bereit, bei der ersten günstigen Gelegenheit ins Bewusstsein zurückzukehren. Diese Gelegenheit giebt zunächst die unmittelbare Reproduction der Vorstellungen. Sie besteht in der Thatsache, dass nicht nur jede bewusste sinnliche Wahrnehmung, sondern überhaupt jede aus irgend welcher Ursache ins Bewusstsein tretende Vorstellung alle ihr gleichartigen und daher, weil Gegensatz nur zwischen gleichartigen Vorstellungen möglich ist, selbst die ihr entgegengesetzten Vorstellungen, die früher einmal gegenwärtig waren, mit mehr oder weniger Klarheit, je nachdem dies anderweite Umstände zulassen, wiedererweckt, ins Bewusstsein zurückführt. Hierdurch könnten jedoch immer nur verwandte Vorstellungen zusammentreffen, indess thatsächlich doch auch ungleichartige, oft völlig disparate Vorstellungen gleichzeitig erscheinen. Dies nun geschieht vermöge der mittelbaren Reproduction der Vorstellungen. Sie beruht auf der Thatsache der Association. Thatsache ist es nämlich, dass gleichzeitig gegebene Vorstellungen, die also im Bewusstsein zusammentreffen, unabhängig von der Gleichartigkeit oder Ungleichartigkeit ihres Inhaltes sich verbinden, associiren, wobei man zur Unterscheidung die Verbindungen gleichartiger Vorstellungen Verschmelzungen, die der ungleichartigen Complexionen nennen kann. Diese Verbindung löst sich nicht auf, wenn auch die Vorstellungen aus dem Bewusstsein verschwinden, sondern dauert fort, auch wenn diese in Ver-

gessenheit kommen. Denn es ist eben Thatsache, dass, wenn eine von zwei Vorstellungen, die früher gleichzeitig zum Bewusstsein kamen, in dieses zurückkehrt, sie auch die andre nach sich zieht; was nicht nur beweist, dass sie sich damals verbunden haben, sondern dass diese Verbindung auch von Dauer gewesen ist und nicht mit der Vergessenheit der Vorstellungen sich aufgelöst hat. So vernehmen wir z. B. gleichzeitig mit der Anschauung eines uns neuen Gegenstandes seinen Namen, und wenn wir später den Gegenstand wieder sehen, so fällt uns auch sofort sein Name bei, oder wenn wir den Namen wieder aussprechen hören, so vergegenwärtigt sich uns die Vorstellung des Gegenstandes. In derselben Weise verbinden sich auch die Vorstellungen successiver Wahrnehmungen, wenn nämlich die spätere Wahrnehmung mit dem als Vorstellung noch im Bewusstsein verweilenden Nachbild der früheren zusammentrifft, und hieraus entstehen Reihen mit einander verketteter Vorstellungen von Ereignissen, die in der Zeitfolge nach einander wahrgenommen wurden. Jedes Glied einer solchen Reihe zieht, wenn es wieder ins Bewusstsein tritt, sein nächstfolgendes Glied nach sich, und so vergegenwärtigt sich in der Erinnerung die ganze Kette der Ereignisse.

Die Psychologie zeigt, dass auf der Association und Reproduction der Vorstellungen nicht nur Erinnerung und Phantasiren, sondern auch Urtheilen, Schliessen, Selbstbewusstsein, überhaupt *alle* höhere Thätigkeit und Ausbildung des Geistes beruht, und dass auch der bunte Wechsel der Gefühle und Gemüthsstimmungen, der Wünsche und des Verlangens, des leidenschaftlichen Begehrens und vernünftigen Wollens daraus erklärlich wird. Diese Erklärungen halten sich jedoch in einer Allgemeinheit, bei der immerhin eine gewisse Unbestimmtheit übrig bleibt. Dies rührt daher, dass ihnen jede quantitative Bestimmtheit abgeht. Dass aber die Klarheit unsrer Vorstellungen, die Intensität unsrer Gefühle, Wünsche und Begehrungen, die Heftigkeit unsrer Affecte, die Stärke unsrer Leidenschaften und unsrer Selbstbeherrschung höchst verschiedene Grade hat, dass unser Gedankenlauf bald ein träger bald ein

beschleunigter ist u. dgl. m., ist abermals Thatsache. Hiernach entsteht nun die wichtige Frage, ob nicht vielleicht die Psychologie durch schärfere Berücksichtigung dieser quantitativen Bestimmungen einen wesentlichen Fortschritt machen und dadurch sich von dem empirischen und logisch-rationalen Standpunkt zu dem einer mathematisch-exacten Wissenschaft erheben könne.

Der Ausführbarkeit dieses Gedankens scheint indess vor allen Dingen als unübersteigliches Hinderniss der Umstand entgegenzutreten, dass alle jene Grössen nicht messbar sind, und dass jede auf irgend eine Hypothese gebaute mathematische Theorie der Veränderungen unsrer geistigen Thätigkeiten und Zustände, in Ermangelung der Möglichkeit einer numerischen Vergleichung ihrer allgemeinen Formeln mit der Erfahrung, problematisch und daher unfruchtbar bleiben zu müssen scheint. In der That, wenn man weiss, dass der Astronom, dass der mathematische Physiker eine Theorie veränderlicher Erscheinungen erst dann für begründet hält, wenn die numerischen Differenzen zwischen den Resultaten der Berechnung und der Messung innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler liegen, so kann in diesem Sinne von einer mathematischen Theorie des Wechsels der psychischen Phänomene, deren Grössenbestimmungen kaum eine oberflächliche Schätzung zulassen, nicht die Rede sein. Es scheint jedoch, wenn es darum zu thun ist, durch eine neue Wissenschaft unsre Erkenntniss zu erweitern, weder billig noch förderlich, sogleich den Maassstab der Kritik anzulegen, den eine der Vollendung entgegenreifende Wissenschaft zu ertragen vermag, vielmehr scheint es passender sich auf den Standpunkt zu versetzen, den auch die mathematische Naturforschung in ihrer Kindheit einnahm, wo sie sich noch mit allgemeineren Uebereinstimmungen zwischen Theorie und Erfahrung begnügte, bis schärfere Beobachtungsmittel grössere Ansprüche an die Theorie machten und nun zwischen beiden ein rühmlicher und erfolgreicher Wetteifer sich erhob. Was nun den erwähnten Einwurf gegen die Möglichkeit der Einführung der Mathematik in die Psychologie betrifft, so muss vor allem Andern der Unterschied der theoretischen

und der praktischen Messbarkeit der Grössen beachtet werden. Man kann immerhin schon eine Theorie veränderlicher Erscheinungen versuchen, wenn sich nur die Möglichkeit ihrer Messung in Begriffen nachweisen lässt. Diese Nachweisung beruht zuletzt immer auf der Angabe der Bedingungen, unter denen zwei Grössen gleich sind und eine als das Vielfache einer andern anzusehen ist. In der Statik z. B. beruht der Begriff gleicher Kräfte auf der Anerkennung der Möglichkeit von zwei Kräften, die nach entgegengesetzten Richtungen auf einen und denselben Punkt wirkend sich das Gleichgewicht halten, der Begriff der Vervielfachung einer Kraft auf der Anerkennung der Möglichkeit, dass mehrere unter einander gleiche nach derselben Richtung auf denselben Punkt wirkende Kräfte sich durch eine einzige ihnen gleichwirkende Kraft, die Resultante, ersetzen lassen. Damit ist die Messbarkeit der Kräfte theoretisch nachgewiesen; die praktische Messbarkeit dagegen bedarf nicht nur des Erfahrungsbegriffes des Druckes schwerer Körper, sondern auch der Theorie des Hebels und des Schwerpunktes, die also unabhängig davon sich muss entwickeln lassen, wie dies denn in der That die reine Statik ohne alle Zuziehung der Erfahrung thut. In ähnlicher Weise beruht in der Photometrie die theoretische Messbarkeit der Intensität des Lichtes auf der Voraussetzung, dass das Auge die Gleichheit der Helligkeitsgrade beleuchteter Gegenstände (bei einerlei Färbung) unmittelbar zu erkennen vermöge, und auf dem Grundsatze, dass Lichter von gleicher Helligkeit bei gleicher Entfernung von einer ebenen Fläche dieselbe in einem Grade erleuchten, welcher der Anzahl der Lichter proportional ist, wobei zur Motivirung dieser Annahme auf den Parallelismus der Lichtstrahlen hingewiesen wird, vermöge dessen sie einander in ihrer Wirksamkeit nicht behindern*. Lässt sich

---

* §. 51 von Lambert's Photometrie lautet: *Miranda hac radiorum proprietate (sc. lumen lumini, dum per eundem locum transit, non obesse) magna ex parte nititur lex — — chartae nempe illuminationem eo esse majorem quo major est numerus candelarum, a quibus collustratur, siquidem aequali eas gaudere claritate, aequali a charta*

nun in ähnlicher Weise die theoretische Messbarkeit der in der Psychologie vorkommenden Grössen nachweisen, so hindert Nichts, wenigstens als mathematische Speculation eine Theorie ihrer Veränderungen zu versuchen; ja man darf nicht einmal alle Hoffnung aufgeben, dass die Entwickelung einer solchen Theorie künftig zu Resultaten führen könne, durch die, vielleicht in sehr mittelbarer Weise, auch eine wirkliche Messung der empirisch gegebenen psychologischen Grössen möglich wird.

Aber zugegeben, dass eine mathematische Psychologie als Speculation ausführbar erscheint, wie nun, wenn verschiedene Grundansichten zu völlig verschiedenen Theorieen führen? Wie soll bei der directen Unmessbarkeit der empirisch gegebenen psychologischen Grössen dann entschieden werden, welche von diesen Theorieen die wahre ist? Diese Besorgniss kommt jedenfalls zu früh, denn zur Zeit ist nur eine einzige, die von Herbart aufgestellte, vorhanden. Gesetzt aber, es komme zu dieser künftig eine zweite und dritte, so würde sich eine vor der andern doch wol durch innere Vorzüge auszeichnen und schon dadurch sich mindestens als die wahrscheinlichere geltend machen; denn in allen mathematischen Theorieen von Phänomenen hat der Grundsatz «*simplex veri sigillum*» keine geringe Autorität. Diejenige, welche bei gleich guter oder besserer Uebereinstimmung mit den vorhandenen allgemeinen Thatsachen der innern Erfahrung, bei der grössten Einfachheit der Principien, zugleich die reichste und natürlichste organische Entwickelungsfähigkeit zeigte, würde dann vor den andern den Preis erringen. Es möchte indess ungeachtet des Mangels an messbaren Daten doch nicht gar zu leicht sein, auf vielfache Weise in mathematischer Form auch nur die fundamentalen Thatsachen zu erklären, dass uns immer nur wenige Vorstellungen auf einmal gegenwärtig sind, dass die un-

---

distantia, aequali denique magnitudine ponas. Cum enim lumen alterum alteri non officiat, patet, quotlibet novis superadditis candelis, aequales quoque superaddi claritatis gradus. In genere enim vi simplae additur dupla, tripla etc. priore non destructa.

ermessliche Menge aller übrigen sich uns gewöhnlich auch nicht einmal durch ein dunkles Gefühl bemerklich macht, dass ein oft nur schwacher und unbedeutender sinnlicher Eindruck plötzlich die Gedanken verscheucht, die uns eben lebhaft beschäftigten, dagegen wie durch einen Zauberschlag längst vergessene aus ihrer Verborgenheit ins Licht des Bewusstseins hervorzieht u. dgl. m.

Stellt sich aber nicht, abgesehen von allem Andern, der Ausführung einer mathematischen Psychologie die grosse Streitfrage über das Wesen unsrer Seele in den Weg? Muss hier nicht entweder für die idealistische oder für die materialistische Grundansicht Partei ergriffen werden? Betritt damit die mathematische Doctrin nicht den schwankenden Boden der metaphysischen Speculation? Schwindet ihr am Ende nicht ganz der sichre Boden der Erfahrung unter den Füssen? Wir glauben diese Fragen auf das Bestimmteste verneinen zu dürfen. Die mathematische Psychologie hält sich allein an die Phänomene des Bewusstseins und versucht es sie in einen mathematischen Zusammenhang zu bringen. Sie bedarf dazu allerdings mancher hypothetischer Hülfsbegriffe, die nicht unmittelbar als Thatsachen gegeben sind; aber sie thut damit nichts Andres als die physische Mechanik, wenn sie undurchdringliche materielle Punkte, bewegende Kräfte und ein Gesetz der Trägheit annimmt. Gelingt es ihr durch ähnliche Rechnungshypothesen einen festen innern Zusammenhang in die psychischen Phänomene zu bringen, so bleibt es dann der metaphysischen Speculation überlassen, diese mathematische Thatsache in idealistischer, materialistischer oder irgend einer vermittelnden Weise zu deuten.

Nach den gegenwärtig vorherrschenden Ansichten möchte weit weniger von Seite des Idealismus als von der Neigung zum Materialismus ein Einspruch gegen diesen Gang der mathematischen Psychologie zu erwarten sein. Die Fortschritte der Physiologie des Nervensystems scheinen immer mehr zu dem Versuche hinzudrängen, das gesammte Geistesleben aus blos materiellen Principien zu erklären. Einige Physiologen haben sich bereits die Resultate der neueren sorgfältiger beobachten-

den und zergliedernden Psychologie anzueignen versucht, um sie mit den Entdeckungen über die verschiedenen Functionen des grossen und kleinen Gehirns, des Rückenmarks und animalischen Nervensystems in Verbindung zu bringen und aus diesen die psychischen Phänomene zu erklären. Diese Richtung muss consequenter Weise verlangen, dass die mathematische Psychologie sich auf eine materielle Basis stelle, etwa Schwingungen von Hirn- und Nervenfasern, oder auf- und absteigende elektrische Strömungen in den galvanischen Ketten der Nerven, oder irgend Etwas der Art zur hypothetischen Grundlage ihrer Betrachtungen mache, und die Lehren der Mechanik materieller Punkte oder der Elektrodynamik dabei wirklich in Anwendung bringe. Es wäre gewagt, über den möglichen Erfolg eines solchen Unternehmens im Voraus absprechen zu wollen. Vor der Hand aber scheint es uns, dass zu seinem Gelingen die Bedingungen noch nicht gegeben sind, schon allein aus dem Grunde, weil alle physiologischen Untersuchungen, die sich auf das Psychische beziehen, über das Gebiet der Empfindungen und willkürlichen Bewegungen, also diejenigen geistigen Erregungen, die das Thier mit dem Menschen gemein hat, noch nicht sich erhoben haben und noch weit davon entfernt sind, über physiologische Bedingungen der höheren Geistesthätigkeiten irgend erhebliche Aufschlüsse zu gewähren. Dass bei allen geistigen Processen leibliche Bedingungen bald hindernd bald fördernd mitwirken mögen, wird sich nicht wohl in Abrede stellen lassen, und wie die Mechanik zwar zuerst nur die Bewegungen im leeren Raume untersucht, dann aber zu denen in widerstehenden Medien übergeht, so wird die mathematische Psychologie in ihrer weiteren Ausbildung leibliche Widerstände und Rückwirkungen in Anschlag zu bringen haben. Im Allgemeinen aber kann man nicht behaupten, dass ausser bei den Empfindungen und willkürlichen Handlungen eine Mitwirkung des Körpers (viel weniger noch die bedingende Thätigkeit irgend welcher Organe desselben) eine sichre Thatsache der Erfahrung wäre, sondern nur, dass sie aus theoretischen Gründen wahrscheinlich ist. Vielleicht kann aber gerade die mathematische Psychologie in einer

spätern Zeit diese Fragen einer exacten Entscheidung näher bringen. Fürs Erste nämlich wird sich bei weiterer Entwickelung derselben deutlicher zeigen, wo eine leibliche Mitwirkung angenommen werden muss, wenn die Formeln den Thatsachen der innern Erfahrung genügen sollen. Sodann aber kann auch schon die Gestalt dieser Formeln zu Entscheidungsmomenten führen. Lässt sich ihnen nämlich eine Auslegung geben, die auf eine materielle Ursache der psychischen Phänomene hinweist, lassen sie sich etwa auch aus einer wahrscheinlichen Hypothese von physisch-mechanischem oder überhaupt physikalischem Inhalte ableiten, so wird dadurch allerdings die Ansicht von der materiellen Bedingtheit des geistigen Lebens gewinnen. Sollte sich aber finden, dass sie sich jeder consequenten Ableitung aus einem materiellen Princip widersetzen, als etwas ganz für sich Bestehendes, jeder durchgeführten Analogie mit materiellen Veränderungen sich Entziehendes angesehen werden müssen, so würde dies der entgegengesetzten Ansicht von der selbständigen Eigenthümlichkeit des Geisteslebens kein geringes Gewicht zulegen.

Was kann nun aber am Ende durch eine solche mit der Erfahrung zur Zeit noch nicht durch Messungen verbundene mathematische Speculation gewonnen werden? Nichts für den, der mathematische Bestimmtheit und Sicherheit in der Ableitung der nothwendigen Folgen gemachter Voraussetzungen nicht zu würdigen weiss, Vieles für den besser Unterrichteten. Nur die mathematische Entwickelung eines Princips, das überhaupt einer solchen fähig ist, giebt klar, überzeugend und vollständig alle Consequenzen, die in ihm liegen und oft der sorgfältigsten blos logischen Betrachtung entgehen. Die Möglichkeit, jede analytische Formel durch Zahlenwerthe zu erläutern, für den Zusammenhang der veränderlichen Grössen eine bildliche Darstellung im Raume zu finden, lässt oft auf einen einzigen Blick erkennen, ob die Formel und die ihr zum Grunde liegende Annahme das leistet, was sie leisten soll. Jede noch so feine logische Eintheilung giebt in Vergleichung mit den Reihen von Zahlenwerthen und den Curven, die den Formeln entsprechen, eine nur dürftige und höchst lückenhafte Uebersicht von den

unter einem allgemeinen Begriff enthaltenen besonderen Fällen. Es wird daher erst durch Anwendung der Mathematik möglich, die allgemeinen psychologischen Erklärungsgründe zu individualisiren und sich dadurch die Versicherung zu verschaffen, dass sie keine den Erfahrungsthatsachen widerstreitenden Folgen versteckt in sich enthalten. Gesetzt auch, diese Zahlwerthe und Curven drückten Nichts mehr aus als beiläufige Mittelwerthe, von denen die Wirklichkeit nach beiden Seiten beträchtlich abwiche, so hat doch, wenn man sie auch blos als näher bestimmte Schemata der zeitlichen Veränderungen der psychischen Phänomene betrachtet, durch sie die Erkenntniss einen grossen Schritt vorwärts gethan. Wer die Einsicht gewonnen hat, dass unter Voraussetzung des leeren Raums der geworfene schwere Körper eine Parabel beschreiben muss, dessen Wissen steht, obgleich diese Parabel nicht die wirkliche Wurflinie ist, ohne Vergleich höher als das Wissen dessen, dem Nichts weiter bekannt ist, als dass jener Körper in irgend einer Curve auf- und absteigt. Selbst wer mit Galilei irrthümlich die Curve, in der eine an ihren Endpunkten aufgehangene Kette ins Gleichgewicht kommt, für eine Parabel hält, besitzt, wenn diese Meinung nicht auf blosser empirischer Anschauung beruht, sondern aus dem allerdings unrichtigen Princip hervorgegangen ist, dass bei der Bestimmung der Curve nicht das Gewicht der Elemente nach ihrer ganzen Länge, sondern nur das ihrer horizontalen Projectionen in Betracht komme, eine wissenschaftliche Erkenntniss, die für einen besondern Fall — den einer scharfen Spannung der Kette — noch ihre approximative Gültigkeit hat.

Man darf sich nicht verhehlen, dass die mathematische Psychologie, zwar nicht in der Entwickelung ihrer Principien, aber in der übereilten Benutzung ihrer Resultate zur Auslegung der Thatsachen der Erfahrung grossen Irrthümern ausgesetzt sein kann. Sie beruht, wie jede mathematische Theorie, auf abstracten Voraussetzungen, bei denen zur Vereinfachung der Untersuchung Anfangs wenigstens eine Menge von Umständen, die in der Wirklichkeit zum Theil von wesentlichem Einfluss sind, bei Seite gesetzt werden müssen. Erst allmälig, je nach-

dem die wissenschaftliche Behandlungsweise an Leichtigkeit und Geschmeidigkeit gewinnt, können diese Nebenumstände in Erwägung gezogen werden. Dieses Verfahren, diese anfängliche selbstgewählte Beschränkung kann ihr nicht als eine eigenthümliche Unvollkommenheit angerechnet werden; sie betritt damit nur denselben Weg, auf dem die Mechanik, die ganze mathematische Physik allmälig zu ihren grossartigen Resultaten gelangt sind. Sie hat sich nur zu hüten, die ersten Ergebnisse ihrer abstracten Voraussetzungen schon als den Schlüssel anzusehen, der die Pforte öffnet, welche in das innerste Heiligthum der psychologischen Erkenntniss führt, indess in Wahrheit damit nur der Eingang zur Vorhalle aufgeschlossen wird. Die mathematische Psychologie muss aber ganz von Vorn anfangen, weil sie sich auf einem Boden bewegt, den weder die Mathematik noch die mathematische Physik zuvor betreten hat. Mag dieser immerhin dem exacten Forscher schlüpfrig scheinen, man hat nur die Wahl, entweder auf eine mathematische Bestimmung der Gesetze unsers geistigen Lebens ein für allemal Verzicht zu leisten, oder die dazu gegebene Gelegenheit, wie sie sich nun eben darbietet, zu ergreifen, die Folgen hypothetischer Annahmen mit Sorgfalt zu entwickeln, und zu prüfen, ob etwas zur schärferen Erklärung der psychischen Phänomene Brauchbares dabei herauskommt.

Es bleibt nur noch übrig, eines ziemlich verbreiteten, gegen die ganze Intention der mathematischen Psychologie gerichteten Vorurtheils zu gedenken, zu dem vielleicht die von Herbart gebrauchte Benennung «Mechanik des Geistes» wenigstens eine Mitveranlassung gegeben hat. Man hat nämlich die Befürchtung ausgesprochen, durch die mathematische Bestimmung der Gesetze des geistigen Lebens werde, wenn sie gelinge, der geistige Mensch zur Maschine herabgewürdigt werden. Allein die mathematische Psychologie setzt sich weder ein solches Ziel, noch würde sie, wenn sie darauf ausginge, es je auch nur näherungsweise zu erreichen vermögen. Ohne hier auf den Streit zwischen dem Determinismus und der absoluten Freiheitslehre tiefer einzugehen, erkennt man ohne Weiteres, dass, was den Mechanismus, sei es an einer Maschine oder

im Umlauf der Himmelskörper, vorzugsweise charakterisirt, die gleichmässige periodische Wiederholung der Phänomene, im geistigen Leben durchaus keine Parallele findet, und daher was nicht gegeben ist auch nicht durch mathematische Betrachtungen hineingetragen werden kann. Zwar kehren häufig die nämlichen Vorstellungen, Gefühle, Begehrungen zurück, aber niemals ganz unter denselben Umständen, am allerwenigsten nach gleichen oder irgend ein Gesetz befolgenden Zwischenzeiten. Unsre Vorstellungen und Gemüthszustände haben keine periodischen Umläufe, und wenn es in ihrer Natur läge, dass sie, in sich abgeschlossen, einen Kreislauf vollenden müssten, so würden die tausendfachen, keiner erkennbaren festen Regel zu unterwerfenden und darum von uns zufällig genannten Berührungen mit der Aussenwelt in dieser Periodicität so gewaltige Störungen hervorbringen, dass sie sich völlig verwischen müsste. Von einer Vorausberechnung unsrer Gedanken, auch nur auf eine Stunde hinaus, wird niemals die Rede sein können, es würden dazu alle Data fehlen. Dagegen geht die mathematische Psychologie allerdings von der Grundvoraussetzung aus, dass Alles, was in unserm Innern geschieht, in einem unter mathematischen Gesetzen stehenden Causalnexus sich befindet. Dies ist jedoch nicht so zu verstehen, als ob die Verkettungen von Ursachen und Wirkungen in dem innern Lebenslauf eines einzelnen oder auch nur des mittleren Menschen sich durch ein System von Formeln oder Curven darstellen liessen, etwa so wie dies von der wahrscheinlichen Lebensdauer des mittleren Menschen für die verschiedenen Stufen seines Lebensalters gilt. Die mathematische Psychologie kann sich nur die Aufgabe stellen, die Gesetze der Veränderungen in den geistigen Zuständen aufzufinden, welche erfolgen müssen, wenn gewisse Bedingungen zusammentreffen. Die Vorherbestimmung der Zeit aber, zu welcher im Leben eines Menschen diese Bedingungen wirklich zusammentreffen werden, der Ordnung, in welcher die Gesetze der psychischen Veränderungen zur Anwendung kommen, übersteigt alle menschlichen Kräfte, denn der Lebenslauf des einzelnen Menschen steht nicht nur im innigen Zusammenhange mit dem aller

andern menschlichen Individuen, die, gleichzeitig oder früher lebend, eine unmittelbare oder mittelbare Wirkung auf ihn äussern oder, was die ersteren betrifft, von ihm erleiden, sondern er ist auch mit dem gesammten Naturlauf so innig verkettet, dass nur eine Intelligenz, vor der dieser, so wie die ganze Geschichte des Menschengeschlechts, als ein aufgeschlagenes Buch daläge, die Fäden zu verfolgen vermöchte, aus denen das Leben des Einzelnen entweder gewebt ist, oder welche diesem Gewebe wenigstens zum Aufzug dienen, durch den der freie Wille seinen Einschlag hindurchflicht.

Sehen wir jetzt zu, welche Mittel der mathematischen Psychologie zur Lösung ihrer in dem Vorstehenden wenigstens im Allgemeinen bezeichneten Aufgabe zu Gebote stehen.

Erster Abschnitt.

Entwickelung der Grundbegriffe und Grundsätze der mathematischen Psychologie.

I. Vorbereitende Betrachtungen.

1.

Das nächste Object der mathematisch-psychologischen Betrachtungen sind die Vorstellungen, und zwar hinsichtlich der Gesetze ihres innerlich wahrnehmbaren Erscheinens, Verweilens und Verschwindens. Gefühle und Begehrungen haften entweder an Vorstellungen oder sind von gewissen Modificationen der Thätigkeit des Vorstellens abhängig; sie können daher, wie in der empirischen, so auch in der mathematischen Psychologie erst in zweiter Reihe Gegenstand der Untersuchung werden. Aber auch von den Vorstellungen sind nicht alle Arten für die anfängliche Betrachtung gleich geeignet. Wir stellen die ganze Classe der nicht sinnlichen, und von den sinnlichen die Empfindungen und Anschauungen bei Seite, da diese nicht blos geistige, sondern zugleich leibliche Zustände, nämlich Erregungen der Sinnesorgane sind. Es bleiben dann nur noch die Gedächtniss- und Phantasiebilder und die Elementarvorstellungen, aus denen sie bestehen, übrig. Nur die letzteren, die Nachbilder einfacher Empfindungen, die darum auch einfache Vorstellungen genannt werden können, eignen sich für den Anfang einer vom Einfachen zum Zusammengesetzten fortschreitenden wissenschaftlichen Betrachtung.*

---

* Ueber die Classification der Vorstellungen vgl. des Vfs. Empirische Psychologie §. 27.

2.

Jede einfache Vorstellung hat ihre bestimmte Qualität, die unveränderlich ist. Die Vorstellung des Rothen z. B. kann nicht in die des Violetten oder Blauen, die des Tones *a* nicht in die der Töne *b* und *c* übergehen; denn dies sind eben andre Vorstellungen. Dagegen ist jede einfache Vorstellung, wenigstens ihrer Erscheinung nach, quantitativ veränderlich. Wir können uns nämlich den Inhalt oder die Qualität jeder früher wahrgenommenen Empfindung mit mehr oder weniger Lebhaftigkeit, Klarheit vorstellen. Diese Klarheit hat unendlich viele Grade. Der höchste Grad der Klarheit einer einfachen Vorstellung ist der, welchen sie im Momente ihres Entstehens durch Empfindung hat und den wir daher die ursprüngliche Klarheit der Vorstellung nennen wollen. Ohne neue Erregung des entsprechenden Sinnesorgans oder mindestens des Sinnesnervs (wie vielleicht bei Visionen oder in fieberhafter Aufregung) vermag die Vorstellung als solche, d. h. als blosse Erregung der Seele, die ursprüngliche Klarheit nie völlig wieder zu erreichen. Der niedrigste Grad der Klarheit ist der, bei welchem die Vorstellung spurlos aus dem Bewusstsein verschwindet; offenbar kann er nur als eine unendlich kleine Grösse gedacht werden. Der ursprüngliche Grad der Klarheit ist nicht für alle Vorstellungen derselbe. Die Empfindungen des Lichts, des Klanges, der Wärme, des Geschmacks und Geruchs, der Spannung der Muskeln, der sinnlichen Lust und Unlust haben sehr verschiedene Intensitäten, und diese tragen sich auch auf die durch sie erzeugten einfachen Vorstellungen über.

3.

Genau genommen bieten sich einfache Vorstellungen der innern Beobachtung niemals isolirt dar, sondern sie erscheinen immer in mannichfaltigen Verbindungen, in grosser Anzahl zu einem Ganzen verschmolzen, dessen einzelne Theile wir nicht zu unterscheiden vermögen, mag nun dieses Ganze, wie bei den Vorstellungen des Gesichts und Gehörs, bestimmte

Formen und Verhältnisse zeigen, oder, wie bei den Geruchs- und Geschmacksvorstellungen, sich mehr als eine formlose Mischung darstellen. Auch die reinste Farbe, der reinste Ton, den wir uns vorstellen, ist, da jene nicht ohne Ausdehnung, dieser nicht ohne eine gewisse Dauer gedacht werden kann, als eine Verschmelzung unbestimmbar vieler, einzeln unwahrnehmbarer Perceptionen anzusehen (Leibnizens *perceptions insensibles*). Es ist daher nöthig zu bemerken, dass wir unter einfachen Vorstellungen nicht diese verschwindend kleinen Perceptionen, sondern die wahrnehmbaren Verschmelzungen einer unangeblichen Anzahl derselben (nicht die Differentiale, sondern die Integrale aus den Differentialen) verstehen. Die mathematische Psychologie kann zwar auch auf die Entstehung der einfachen Vorstellungen aus ihren unwahrnehmbaren Perceptionen zurückgehen, aber diese Untersuchung eignet sich zum Anfang ebenso wenig, als die physische Mechanik mit der Theorie der Molecülarattraction beginnen kann. Der Begriff der einfachen Vorstellung ist daher so gut wie der des materiellen Punktes, oder des Molecüls, eine wissenschaftliche Abstraction, die gleichwohl ihre Gültigkeit hat, da zusammengesetzte Vorstellungen, welche thatsächlich gegeben sind, Bestandtheile haben müssen. Nur sind unsre einfachen Vorstellungen nicht als absolut Einfaches anzusehen, sondern als Etwas, was relativ als solches gedacht werden kann. Wir nennen nämlich einfache Vorstellungen solche, denen keine Mannichfaltigkeit der Qualität zukommt, und deren Inhalt weder in räumlicher noch zeitlicher Beziehung als ein neben oder nach einander seiendes Vieles, sondern als ein intensives, aber endliches, Eins zu denken ist.

4.

Bei diesem Verhältniss der einfachen Vorstellungen beziehen sich daher die zum Theil schon in der Einleitung erwähnten Thatsachen der innern Erfahrung über den Wechsel der Vorstellungen unmittelbar nicht auf sie, sondern auf die aus ihnen bestehenden Verschmelzungen und Complexionen. Aber es liegen in ihnen Hinweisungen auf das Verhalten der einfachen

Vorstellungen, die wenigstens zu hypothetischen Annahmen führen, deren Richtigkeit sich durch die Uebereinstimmung der aus ihnen zu entwickelnden nothwendigen Folgen mit den wirklich gegebenen Thatsachen erproben muss. Die fundamentalen Thatsachen, für welche vor allem Andern Erklärungsprincipien aufzustellen sind, die eine mathematische Behandlung zulassen, können nun in folgende drei Sätze zusammengefasst werden:

1. Die Anzahl der Vorstellungen, deren wir uns gleichzeitig bewusst sind, ist in Vergleichung mit der Anzahl derer, die nach einander zur innern Erscheinung kommen können, eine sehr geringe.

2. Vorstellungen werden durch andre Vorstellungen aus dem Bewusstsein verdrängt.

3. Vorstellungen, die aus dem Bewusstsein verschwunden, durch andre verdrängt sind, können unter günstigen Umständen in dasselbe zurückkehren. Sie sind nicht als vernichtete, sondern nur als völlig unwahrnehmbar gewordene anzusehen, und ihre Wiederkehr ist keine neue Erzeugung derselben.

5.

Diese Sätze sind von den Phänomenen der unwillkürlichen Aufmerksamkeit und des Gedächtnisses abstrahirt. Auf Vielem zugleich kann die Aufmerksamkeit nicht haften, die Vielheit des Vorgestellten theilt und schwächt sie, die ungetheilte Aufmerksamkeit ist die stärkste. Die auf irgend ein Object gerichtete Aufmerksamkeit ist aber Nichts weiter als die Vorstellung dieses Objects im möglichst ungeschwächten Grade der Klarheit.* Daher ist die Bedeutung dieser Thatsachen die, welche der erste der obigen Sätze enthält. Auf dieselbe Weise ist der zweite Satz durch das Factum begründet, dass die unwillkürliche Aufmerksamkeit sich von einem Object ablenkt, wenn sie sich auf ein andres richtet. Der Wechsel endlich in der Aufmerksamkeit, die sich bald diesem bald jenem Object zuwendet, dann wieder zu dem ersten zurückkehrt und die andern

* Empirische Psychologie §. 30.

fallen lässt, zeigt einen Wechsel zwischen Erscheinen, Verschwinden und Wiederkehren der Vorstellungen selbst an.

In grösserem Maassstabe geben die Phänomene des Gedächtnisses dieselben Resultate. Die Anzahl der im Bewusstsein gegenwärtigen Vorstellungen (mögen sie nun mehr oder weniger die Aufmerksamkeit auf sich ziehen) ist gering gegen die Anzahl derer, an die wir nicht denken, und die also im Augenblicke wenigstens vergessen sind. Wir vergessen aber eben Eins über das Andre, d. h. eine Vorstellung verdrängt die andre. Wir erinnern uns aber auch wieder des Vergessenen, d. h. die Vorstellung steigt aus ihrer Verborgenheit wieder ins Bewusstsein auf.*

Versuchen wir nun aus diesen Thatsachen eine Grundansicht über das gegenseitige Verhalten der einfachen Vorstellungen zu gewinnen, auf welchem denn doch, da sie die Elemente der zusammengesetzten sind, die Erklärung des Verhaltens dieser letzteren beruhen muss.

II. Allgemeine Principien der mathematischen Psychologie.

6.

Obgleich die Vorstellungen nur, wenn sie von Gefühlen oder Begehrungen begleitet sind, unmittelbar auf ein Leiden oder Thun der Seele hinweisen, ausserdem als blosse Bilder in der Seele erscheinen, so haben wir sie doch nicht, selbst wenn sie sich auf äussere Objecte beziehen, als von Aussen her eingedrungen zu betrachten, sondern vielmehr als in der Seele selbst entstanden anzusehen, als ihre Grundursache aber eine Thätigkeit der Seele anzunehmen, welche, wenigstens jedenfalls wenn von sinnlichen Vorstellungen die Rede ist, durch Vorgänge in der Aussenwelt angeregt und durch die Thätigkeit der Sinnesorgane, Sinnesnerven und des Gehirns vermittelt wird. Wir nennen diese Thätigkeit das Vorstellen. Da räumliche Ausdehnung den Vorstellungen nicht zukommt, so ist auch die ihnen zum Grunde liegende Thätigkeit nur als eine intensive zu denken.

---

* Empirische Psychologie §. 31.

7.

Die Thätigkeit des Vorstellens kann bei der Mannichfaltigkeit der Qualitäten der Vorstellungen nicht für alle schlechthin eine und dieselbe sein, sondern wie verschiedenartig die Qualitäten der Vorstellungen sind, so verschiedenartig ist auch die ihnen zum Grunde liegende Thätigkeit des Vorstellens zu denken. Dasselbe gilt in Bezug auf die quantitative Verschiedenheit der ursprünglichen Klarheit der Vorstellungen (§. 2.). Derjenigen von zwei Vorstellungen, welche die grössere ursprüngliche Klarheit hat, kommt auch eine grössere Stärke oder Intensität des ihr zum Grunde liegenden Vorstellens zu. Diese Stärke des Vorstellens ist immer gemeint, wenn wir in der Folge zur Abkürzung von Intensitäten der Vorstellungen reden werden.

8.

Die Thätigkeit des Vorstellens ist ferner nicht als eine allmälig abnehmende und endlich gänzlich erlöschende, sondern an und für sich als in unveränderter Qualität und Stärke gleichmässig fortdauernd zu denken. Sie ist auch nicht als durch Pausen unterbrochen, sondern als stetig fortdauernd anzusehen. Nach dem strengen Begriff des Unendlichkleinen steht es jedoch hiermit nicht in Widerspruch, wenn man sie als eine in jedem unendlich kleinen Zeittheil gleichmässig sich wiederholende betrachtet.

9.

Der Ausübung der Thätigkeit des Vorstellens können sich Hindernisse entgegenstellen. Die Folge davon wird sein, dass die Vorstellung dann nicht mehr in ihrer ursprünglichen, sondern in verminderter Klarheit erscheint. Diese Verminderung kann bis zum völligen Verschwinden der Vorstellung fortschreiten. Die Thätigkeit selbst aber wird dadurch weder im ersteren Falle vermindert, noch im andern aufgehoben, sondern sie dauert in andrer Form, nämlich als Streben vorzustellen, ungeschwächt fort und geht wieder in

wirkliches Vorstellen über, sobald die Hindernisse beseitigt sind. Wir können demnach eine freie und eine — ganz oder theilweise — gehemmte Thätigkeit des Vorstellens unterscheiden.

10.

Die Hindernisse des freien Vorstellens können leibliche oder geistige sein. Zu jenen gehören die leiblichen Zustände, die den traumlosen Schlaf und die Ohnmacht zur Folge haben, wo alles freie Vorstellen aufhört. Auf geistige Hindernisse weisen die oben (§. 4.) aufgeführten Thatsachen hin. Die Erfahrung scheint bei ihnen auf den ersten Anblick darüber in Zweifel zu lassen, ob in der blossen Vielheit gleichzeitig gegebener Vorstellungen oder in ihrer qualitativen Verschiedenheit der Grund der Unmöglichkeit liegt, mehrere derselben eine merkliche Zeit lang in ihrer ungeschwächten ursprünglichen Klarheit neben einander festzuhalten. Ueberlegt man jedoch, dass eine Vielheit gleicher Objecte ohne etwas sie von einander Sonderndes, von ihnen qualitativ Verschiedenes, gar nicht vorgestellt werden kann, und dass wir z. B. in unsrer allgemeinen Vorstellung von Mengen unter sich gleicher Einheiten von dem diese Einheiten Sondernden, um einen reinen Begriff zu erhalten, nur absichtlich abstrahiren, d. h. es, als nicht zur Sache gehörig, obwohl für die Vorstellung unentbehrlich und unabweislich, ignoriren, so ist es wenigstens das Natürlichste — zumal da reine Gleichheit eher zur Vereinigung des Gleichen in ein ungetheiltes Ganzes als zum Widerstreben geeignet scheint — als den Hauptgrund jener Thatsache die qualitative Verschiedenheit der Vorstellungen anzusehen und die Bestimmung, inwiefern überdies die Vielheit als solche von Einfluss ist, der weiteren Entwickelung dieser Annahme zu überlassen.

11.

Es giebt aber eine doppelte qualitative Verschiedenheit, die des Gleichartigen und die des Ungleichartigen, Unvergleichbaren, Disparaten. Die äussersten Enden einer Reihe gleichartiger Objecte des Vorstellens, z. B. Schwarz und Weiss,

als Grenzen der verschiedenen Abstufungen des Grauen, nennen wir conträr oder völlig entgegengesetzt. Den mittleren Gliedern einer solchen Reihe kommt, je nach ihrer Entfernung von einem der Endglieder, nur ein gewisser Grad der Entgegensetzung oder des Gegensatzes in Bezug auf dieses Endglied zu, der immer ein echter Bruch sein wird, wenn man den völligen oder conträren Gegensatz = 1 setzt.

Dagegen findet zwischen disparaten Qualitäten, z. B. Tönen und Gerüchen, Farben und Geschmäcken, weder Gegensatz noch Einerleiheit, überhaupt kein angebliches Verhältniss statt. Ein innerer Grund, disparate Vorstellungen für einander unmittelbar behindernde zu betrachten, ist also nicht vorhanden. Auch verdient hierbei Beachtung, dass die Logik zwar gleichartige Merkmale für unvereinbar in Einem Begriffe, disparate dagegen für vereinbare erklärt. Andrerseits ist es freilich Thatsache, dass wir nicht mit ungetheilter Aufmerksamkeit zugleich sehen und hören, fühlen und schmecken können u. s. f. Aber abgesehen davon, dass diese Erfahrung nicht blosse Vorstellungen, sondern Empfindungen betrifft, also denkbar wäre, dass die Unverträglichkeit disparater Empfindungen blos einen physiologischen Grund hätte, der sich also auf die vom Leibe jedenfalls weit unabhängigeren Vorstellungen nicht übertragen liesse, — so macht eine nähere Analyse dieser Erfahrung es mindestens sehr wahrscheinlich, dass das Hinderniss, welches nicht gestattet, auf zwei Empfindungen von disparater Beschaffenheit die gleiche und ungeschwächte Aufmerksamkeit zu richten, in Vorstellungen liegt, die, dem Inhalt der einen Empfindung entgegengesetzt, sich bei früheren Wahrnehmungen mit der andern complicirt haben, so dass das scheinbare Widerstreben des Disparaten auf das des damit verbundenen Entgegengesetzten zurückgeführt wird.*

12.

Wenn nun qualitativ verschiedenen Vorstellungen eben so verschiedenartige Beschaffenheiten der Thätigkeit des Vorstel-

* Empirische Psychologie §. 50. S. 128.

lens entsprechen (§. 7.), so dürfen wir nach den vorstehenden Erörterungen annehmen, dass zwischen einem mehrfachen gleichzeitig erregten Vorstellen von mehr oder weniger entgegengesetzter Beschaffenheit eine gegenseitige Hemmung (§. 9.) eintreten muss, die in der verminderten Klarheit der Vorstellungen zur Erscheinung kommt. Wir drücken diese Annahme kürzer durch den Satz aus: gleichzeitig gegebene entgegengesetzte Vorstellungen hemmen sich gegenseitig. Es versteht sich von selbst, dass damit weder für voll noch für blos graduell entgegengesetzte Vorstellungen ohne Weiteres eine gänzliche Hemmung behauptet wird, bei der sie aus dem Bewusstsein völlig verschwinden würden. Offenbar nämlich wird die Hemmung, je nach dem Grade des Gegensatzes, selbst bei gleichen Intensitäten der Vorstellungen, eine verschiedene Grösse haben.

13.

Jede Vorstellung widerstrebt aber auch der Hemmung. Denn wenn gleich durch diese die Freiheit des Vorstellens vermindert wird, so erleidet doch dabei die Thätigkeit selbst keine Verminderung, sondern nimmt nur in dem Maasse, in welchem sie aufhört frei zu sein, die Form des Strebens vorzustellen an (§. 9.). Je stärker nun die ursprüngliche Thätigkeit des Vorstellens ist, einen um so grösseren Widerstand wird sie der gegen sie gerichteten Nöthigung zur Hemmung entgegensetzen. Hieraus erhellt, dass unter übrigens gleichen Umständen Vorstellungen von grösserer Intensität (§. 7.) in geringerem Maasse der Hemmung unterliegen werden als schwächere.

14.

Wenn die Grade des Gegensatzes und die Intensitäten der Vorstellungen wirklich als Grössen betrachtet werden dürfen (woran, da sie grösser oder kleiner sein können, nicht zu zweifeln ist, indess die Berechtigung, die Verhältnisse dieser Grössen zu einander durch Zahlen auszudrücken, hieraus allerdings noch nicht folgt, vielmehr einer besondern Begründung

bedarf), so muss es für jede von mehreren gleichzeitig gegebenen entgegengesetzten Vorstellungen eine bestimmte Grösse der Hemmung geben, bei welcher das Widerstreben gegen dieselbe der von den entgegengesetzten Vorstellungen ausgehenden Nöthigung dazu gleich ist. Tritt diese Gleichheit zwischen Nöthigung und Widerstreben für alle gegebene Vorstellungen gleichzeitig ein, so ist weder zur anderweiten Vermehrung noch zur Verminderung der Hemmung eine Ursache vorhanden. Wir nennen diesen Zustand, bei welchem so viel von den Vorstellungen gehemmt ist, als durch ihre Verhältnisse zu einander gefordert wird, und so viel von ihnen frei bleibt, als die Umstände gestatten, das Gleichgewicht der Vorstellungen. Nur in ihm können sie zur Ruhe kommen, indess ausser ihm immer eine Nöthigung zur Vermehrung oder Verminderung der Hemmung übrig bleibt, die eine Veränderung der Hemmungsgrössen bewirkt.

15.

Ob gleichzeitig gegebene entgegengesetzte Vorstellungen den Zustand des Gleichgewichts in einer endlichen Zeit wirklich erreichen, muss der späteren Untersuchung vorbehalten bleiben. Dass sie demselben aber mindestens müssen sehr nahe kommen können, geht aus dem Vorhandensein anschaulicher Vorstellungen von sinnlich wahrgenommenen und Phantasie-Objecten hervor. Ein ruhiges Bild, die Verschmelzung einer Vielheit von Empfindungsvorstellungen, wäre nicht möglich, wenn die verschmolzenen Elemente sich nicht wenigstens nahe im Gleichgewicht befänden. Sie würden sich ausserdem in einer unaufhörlichen Unruhe befinden, bei der eine gleichzeitige Auffassung der Theile des Bildes, die eben das Anschauliche charakterisirt, nicht möglich wäre.

16.

Der Uebergang aus dem ungehemmten Zustande, in welchem Vorstellungen, die durch sinnliche Wahrnehmung gegeben sind, im ersten Momente ihres Erscheinens sich befinden, in den Zustand der Hemmung, sei es der für das Gleichgewicht

erforderliche oder irgend ein andrer, kann nicht plötzlich erfolgen, sondern muss im Allgemeinen ein stetiger sein (was jedoch ein- oder mehrmalige Unterbrechungen der Stetigkeit nicht ausschliesst), denn die Nöthigung zur Hemmung findet, sobald sie zu wirken anfängt, sofort an dem Widerstreben der Vorstellungen, das mit der wirklichen Hemmung zunimmt, einen Widerstand, der die Wirkung nothwendig verzögert. Diese stetige Veränderung des freien oder gehemmten Zustandes, die in der Veränderung der Klarheit der Vorstellungen zur Erscheinung kommt, bezeichnen wir als die Bewegung der Vorstellungen. Dass dabei nicht an eine Ortsveränderung zu denken ist, sondern das Wort nur im metaphorischen Sinne auf eine stetige Reihe intensiver Veränderungen bezogen wird, erhellt aus allem Vorigen von selbst.

17.

Da ausser der Ab- und Zunahme der Klarheit der Vorstellungen und der Freiheit der sie bedingenden Thätigkeit des Vorstellens eine dritte Art der Veränderung nicht denkbar ist, so giebt es auch nur zwei einander entgegengesetzte Arten von Bewegungen der Vorstellungen. Entweder nämlich nimmt die Freiheit ab und die Hemmung zu, oder umgekehrt diese ab und jene zu. Wir nennen die Abnahme der Freiheit und Zunahme der Hemmung das Sinken, die Zunahme der Freiheit und Abnahme der Hemmung das Steigen der Vorstellungen. Eine der seitlichen Richtung der Bewegung eines Punktes im Raume analoge Veränderung des Zustandes der Vorstellungen ist also undenkbar. Dagegen sind für die Bewegungen der Vorstellungen eben so grosse Verschiedenheiten in der Geschwindigkeit und der Aenderung derselben denkbar wie bei den Bewegungen im Raume.

18.

Nach diesen Auseinandersetzungen geben nun die Vorstellungen Stoff zu zwei Classen von mathematischen Aufgaben. Für jede Anzahl gleichzeitig gegebener Vorstellungen von bekannten Intensitäten und Graden ihrer Gegensätze können

nämlich gesucht werden: 1. die Grössen der Hemmungen, bei denen sie sich im Gleichgewicht befinden; 2. die Bewegungsgesetze, nach denen sie sinken und steigen. Hiernach zerfällt die mathematische Psychologie in zwei Theile, die mit dem Namen der psychischen Statik und psychischen Mechanik bezeichnet werden können.* Der weiteren Ausführung dieser Wissenschaften kommt es zu, ihre Aufgabe nicht blos für einfache, sondern auch für zusammengesetzte Vorstellungen (Verschmelzungen und Complexionen einfacher Vorstellungen) zu lösen. In der gegenwärtigen Schrift wird innerhalb der vorgezeichneten Grenzen auch auf die letzteren Rücksicht genommen werden.

III. Von den Grössenbestimmungen der mathematischen Psychologie.

19.

Wenn psychische Statik und Mechanik mathematische Wissenschaften sein, wenn Gleichgewicht und Bewegung der Vorstellungen durch Rechnung bestimmt werden sollen, so genügt es nicht, zu wissen, dass die Gegensätze und Intensitäten der Vorstellungen constante, Hemmung und Klarheit veränderliche Grössen sind, sondern es ist vor allem Andern darüber eine bestimmte Nachweisung zu geben, dass diese Grössen durch Zahlen ausgedrückt werden können. Es ist dies die Nachweisung dessen, was wir in der Einleitung die theoretische Messbarkeit der psychologischen Grössen genannt haben. Wir geben sie zunächst für die Gegensätze der Vorstellungen.

* Für die Lehre von den Bewegungsgesetzen der Körper ist unter französischem Einfluss der Name Dynamik bräuchlich geworden, indess unter der Mechanik Statik und Dynamik zusammengenommen verstanden werden. Sprachrichtiger würde es gewesen sein, das Ganze Dynamik und die Bewegungslehre Mechanik zu nennen. Da Herbart für die Bezeichnung der Theile der mathematischen Psychologie die richtigeren Benennungen Statik und Mechanik gewählt hat, so finden wir keinen Grund, der blossen Nachahmung zu Liebe davon abzuweichen. Die ganze mathematische Psychologie könnte aber passend auch als psychische Dynamik bezeichnet werden, da die Betrachtung der Vorstellungen als Kräfte in der That das beiden Theilen Gemeinsame ist.

20.

Wenn eine vollständige Reihe einfacher und gleichartiger Vorstellungen gegeben ist, deren Qualitäten stetig in einander übergehen, wie z. B. die Reihe aller möglichen Nüancen des Grünen, von dem in reines Blau übergehenden Blaugrün bis zu dem im reinen Gelb sich verlierenden Gelbgrün, also eine Reihe, die wir als ein Continuum von Vorstellungen, oder genauer, der Qualitäten derselben bezeichnen können, so nennen wir je zwei beliebige Glieder dieser Reihe einander verwandt und verstehen darunter, dass ihre Qualitäten, mit einander verglichen, den gemischten Eindruck einer Verschiedenheit machen, die zugleich etwas der Art nach Gleiches, Gemeinschaftliches in sich schliesst. Obwohl nun eine jede solche Qualität, eben weil sie eine einfache sein soll, nicht wirklich zerlegbar ist, so können wir uns doch von jener Verwandtschaft einen bestimmten Begriff nur dadurch bilden, dass wir die zu vergleichenden Qualitäten in Gedanken als in Gemeinsames und Nichtgemeinsames zerlegbar betrachten. Dies geschieht aber dadurch, dass wir zuvörderst die Verwandtschaft irgend eines der mittleren Glieder der Reihe zu den beiden Endgliedern derselben bestimmen.

21.

Da nämlich die äussersten Endglieder einer solchen Reihe (im Beispiel Blau und Gelb) schlechthin nichts Gemeinsames, jedes Mittelglied aber mit jedem von ihnen mehr oder weniger Gemeinsames hat, so kann jedes Mittelglied, je nachdem es dem einen oder dem andern Endglied der Reihe näher verwandt erscheint, wie eine nach bestimmten Verhältnissen aus den Qualitäten der Endglieder zusammengesetzte oder gemischte Qualität betrachtet werden. Oder, was dasselbe, man kann die Qualität eines jeden Mittelgliedes als eine Einheit ansehen, die sich in zwei echte Brüche zerlegen lässt, von denen der eine angiebt, in welchem Maasse die Qualität des einen Endglieds, der andre, in welchem Maasse die des andern die Verwandtschaft bedingt, auf welche die unmittelbare Ver-

gleichung hinweist. Hiernach giebt es also im Beispiel ein Grün, welches als aus $\frac{1}{2}$ Blau und $\frac{1}{2}$ Gelb, ein andres, das als aus $\frac{1}{4}$ Blau und $\frac{3}{4}$ Gelb, ein drittes, das als aus $\frac{3}{4}$ Blau und $\frac{1}{4}$ Gelb zusammengesetzt angesehen werden kann, ohne dass diese Zusammensetzung für die Objecte der Vorstellungen oder auch nur für diese selbst behauptet wird. Sie ist vielmehr nur eine subjective oder, wenn man lieber will, ideale Ansicht von den an sich einfachen Qualitäten der Vorstellungen, durch welche wir sie nur für unser Denken der Vergleichung zugänglich machen.

22.

Hiernach wird nun, wenn wir allgemein die Qualitäten der beiden Endglieder irgend eines Continuums von einfachen Vorstellungen durch B und G, die Qualität eines Mittelgliedes durch g, und durch m einen echten Bruch bezeichnen, unter der Voraussetzung, dass diese drei Qualitäten sich nicht quantitativ von einander unterscheiden (also nicht die eine in einem grösseren Quantum als die andere vorhanden gedacht wird), die Einheit der Qualität g immer als aus dem Bruchtheil m der Einheit von B und dem Bruchtheil $1-m$ der Einheit von G zusammengesetzt angesehen werden können, wofern nur m ein angemessener Werth beigelegt wird. Wir können diese qualitative Zerlegung abgekürzt durch die Formel

$$g = mB + (1-m)G$$

ausdrücken und sagen, dass in ihr m den Grad der Verwandtschaft von g zu B und zugleich den Grad des Gegensatzes von g zu G, ebenso, dass $1-m$ den Grad der Verwandtschaft von g zu G und zugleich den Grad des Gegensatzes von g zu B bezeichne.

23.

Hieraus lassen sich nun auch leicht die Grade der Verwandtschaft und des Gegensatzes von zwei mittleren Gliedern eines solchen Continuums g, g' zu einander bestimmen. Sei nämlich, wie zuvor,

$$g = mB + (1-m)G,$$

in ähnlicher Weise

$$g' = (m + n)\,B + (1 - m - n)\,G,$$

wo also $m+n$ den Grad der Verwandtschaft von g' zu B und des Gegensatzes zu G bedeutet, so enthalten g und g' von der Qualität B das gemeinsame Quantum m, von der Qualität G das gemeinsame Quantum $1-m-n$. Die Summe des Gemeinsamen zwischen ihnen ist also $= m + 1 - m - n = 1 - n$. Dies ist also der Grad ihrer Verwandtschaft, mithin n der Grad ihres Gegensatzes.

24.

Das Endglied eines Continuums vorgestellter Qualitäten kann zugleich ein zweites Continuum begrenzen, das gleichwohl nicht für eine Verlängerung des ersten gelten kann, sondern ein für sich bestehendes Ganzes bildet. Dies zeigt sich ebenfalls an den Farben. Zwischen Blau und Roth liegt das Continuum des Violetten, zwischen Gelb und Roth das des Orange. Beide können nicht als Fortsetzungen des Continuums des Grünen angesehen werden. Reines Gelb und reines Roth enthalten so wenig etwas Gemeinsames, als ihnen dergleichen in Bezug auf reines Blau zukommt. Der Gegensatz zwischen Gelb und Roth, Roth und Blau ist also, so gut wie der zwischen Blau und Gelb, als voller Gegensatz anzusehen, und jede dieser drei Qualitäten steht zu den beiden andern im gleichen, nämlich vollen Gegensatz. Hieraus lässt sich nun auch der Gegensatz von zwei in verschiedenen, nur durch ein gemeinschaftliches Endglied verbundenen Continuen liegenden Qualitäten bestimmen.

25.

Sei z. B. wieder, wie in §. 22.,

$$g = mB + (1 - m)\,G.$$

Bedeute ferner v eine Nüance des Violetten, welche dem reinen Blau, B, im Grade $m + p$, folglich dem reinen Roth, R, im Grade $1 - m - p$ verwandt sei, so ist in gleicher Weise

$$v = (m + p)\,B + (1 - m - p)\,R.$$

Dann haben g und v als Gemeinsames offenbar nur mB. Es

ist daher m der Grad ihrer Verwandtschaft und folglich $1-m$ der Grad ihres Gegensatzes. Ist $m=0$, so wird

$$g = G \text{ und } v = pB + (1-p)R.$$

Es ist daher zum Gelb jedes Violett so gut im vollen Gegensatz wie Blau und Roth, was auch schon daraus, dass diese die idealen Bestandtheile des Violetten sind, von selbst erhellt.

26.

Was hier speciell für die Farben nachgewiesen worden ist, das lässt sich, obwohl mit manchen Modificationen, auch auf andre einfache sinnliche Vorstellungen übertragen, zunächst insbesondre auf die der Töne.* Bei andern liegen die Verwandtschaften und Gegensätze nicht so klar und offen vor und wird es erst noch empirischer Vorarbeiten bedürfen, um sie mit gleicher Sicherheit zu bestimmen. Die Schwierigkeiten, die sich hier im Einzelnen finden mögen, können jedoch auf die Begründung der mathematischen Psychologie, so lange wir sie nur als eine abstracte Theorie betrachten, keinen Einfluss ausüben. Für diesen Zweck scheinen die vorstehenden Auseinandersetzungen zu genügen. Wir gehen daher weiter und wenden uns zu der Untersuchung über die Bestimmbarkeit der Intensitäten durch Zahlen.

27.

Die Möglichkeit und Zulässigkeit die verschiedenen Intensitäten der Vorstellungen, oder deutlicher, der ihrer Erscheinung zum Grunde liegenden Thätigkeit des Vorstellens durch Zahlen auszudrücken, beruht zuvörderst auf der nähern Angabe der Umstände, unter denen zwei Vorstellungen als gleich stark können angesehen werden. Hierbei sind drei Fälle zu unterscheiden, indem nämlich die Vorstellungen entweder von derselben, oder von zwar verschiedener aber gleichartiger, oder endlich von disparater Qualität sein können. Wie bei der Messung der Intensitäten sinnlich wahrnehmbarer Farben

---

* Vgl. des Vfs. Abhandlung über die mathematische Bestimmung der musikalischen Intervalle. Leipzig 1846.

und Töne nicht mehr vorausgesetzt wird, als dass von zwei Farben- oder Ton-Empfindungen derselben Qualität sich unmittelbar beurtheilen lasse, ob sie von gleicher Stärke sind oder nicht, und welcher von beiden im letzteren Falle die grössere Stärke zukommt, — so dürfen wir auch hier nicht mehr fordern, als dass bei gleichzeitig oder in unmittelbarer Aufeinanderfolge gegebenen Vorstellungen derselben Qualität sich unmittelbar erkennen lasse, ob sie den gleichen Grad der Klarheit haben, oder dieser für die eine grösser ist als für die andre. Es wird hiernach also auch postulirt, dass sich unmittelbar erkennen lasse, ob die Klarheit einer und derselben Vorstellung unverändert beharrt oder in Ab- oder Zunahme begriffen ist. Es mag aber ausdrücklich bemerkt werden, dass wir diese Forderung nur auf die Klarheit der Vorstellung, d. i. des Vorgestellten, nicht auf die Energie des Vorstellens beziehen, welche kein Gegenstand der unmittelbaren innern Wahrnehmung ist, sondern auf die nur aus dem Wahrnehmbaren geschlossen werden kann.

28.

Unter der Voraussetzung nun, dass für je zwei gleichzeitig gegebene entgegengesetzte (also gleichartige) Vorstellungen in dem früher (§. 14.) angegebnen Sinne es einen Zustand des Gleichgewichts giebt, mit dessen Eintritt die Klarheit der Vorstellungen keine weitere Aenderung erleidet, können wir folgende Erklärungen aufstellen.

1. Die Intensität einer Vorstellung A ist gleich der Intensität einer andern Vorstellung A' von derselben Qualität, wenn eine dritte, beiden in beliebigem Grade entgegengesetzte Vorstellung B im Gleichgewicht mit A denselben Klarheitsgrad zeigt wie im Gleichgewicht mit A'.

2. Die Intensität einer Vorstellung A ist gleich der Intensität einer andern der Qualität nach von ihr verschiedenen, in beliebigem Grade ihr entgegengesetzten Vorstellung A', wenn eine beiden im gleichen Grade entgegengesetzte Vorstellung B im Gleichgewicht mit A denselben Klarheitsgrad zeigt wie im Gleichgewicht mit A'.

29.

Um in ähnlicher Weise eine Erklärung der Gleichheit der Intensitäten disparater Vorstellungen zu erlangen, ist es nöthig, von den Complexionen solcher Vorstellungen auszugehen. Zwei disparate Vorstellungen A, A' (etwa einer Farbe und eines Klanges, z. B. eines Notenpunktes und seiner Benennung a oder des so benannten Tones) mögen sich im ungehemmten Zustande mit einander complicirt haben. Kommt nun eine dritte Vorstellung B hinzu, die dem einen Bestandtheil der Complexion, z. B. A, in einem beliebigen Grade entgegengesetzt ist (gegen die andere A' sich also disparat verhält), so werden nicht nur die beiden entgegengesetzten Vorstellungen A und B einander hemmen, sondern es wird auch die mit A complicirte Vorstellung A' einen Theil der Hemmung übernehmen, der, wenn A mit A' nicht verbunden wäre, auf ersteres allein fallen würde. Es wird nun auch hier zwischen der Complexion von A und A' einerseits und der einfachen Vorstellung B andrerseits ein Zustand des Gleichgewichts eintreten können, so dass dann also alle drei Vorstellungen keine weitere Aenderung ihrer Klarheit erleiden. Dies vorausgesetzt, können wir nun von der Gleichheit zweier disparaten Vorstellungen B, B' folgende Erklärung geben:

3. Die Intensität von zwei disparaten Vorstellungen B, B' ist gleich, wenn B dem einen Bestandtheil A einer Complexion von zwei Vorstellungen, A und A', in demselben Grade entgegengesetzt ist, wie B' dem andern, A', und die complicirten Vorstellungen im Gleichgewicht mit B denselben Klarheitsgrad haben wie im Gleichgewicht mit B'.

Die Gleichheit der Intensitäten hat in den drei vorstehenden Erklärungen zum charakteristischen Merkmal die Einerleiheit der unter denselben Umständen wahrnehmbaren Wirkungen. Dass es Vorstellungen giebt, die solche identische Wirkungen hervorbringen, muss allerdings postulirt werden; aber nur ohngefähr eben so wie es in der Statik ein Postulat ist, dass es Kräfte giebt, die, auf einen und denselben Punkt nach entgegengesetzten Richtungen wirkend, diesen nicht in Bewegung setzen.

30.

Nach diesen Bestimmungen über die Gleichheit der Intensitäten der Vorstellungen lässt sich nun auch angeben, unter welchen Umständen die Intensität einer Vorstellung als ein Vielfaches einer andern anzusehen ist.

Wenn nämlich eine Vorstellung *A* im Gleichgewicht mit *n* unter einander gleichen Vorstellungen *b* von einerlei Qualität, die sich im ungehemmten Zustand mit einander verbunden (verschmolzen) haben, dieselbe Klarheit zeigt wie im Gleichgewicht mit einer einzigen einfachen, *A* in demselben Grade wie jedes *b* entgegengesetzten Vorstellung *B*, so ist die Intensität von *B* das *n*-fache der Intensität jeder der Vorstellungen *b*.

Oder kürzer, mit Bezug auf die vorhergegangene Erklärung der Gleichheit: die Intensität einer einfachen Vorstellung *B* ist das *n*-fache der Intensität einer andern einfachen Vorstellung *b* von derselben Qualität, wenn sie der Intensität der durch Verschmelzung von *n* der *b* qualitativ und intensiv gleichen Vorstellungen entstandenen zusammengesetzten Vorstellung gleich ist.

Offenbar soll nach diesen Erklärungen *B* so viel wirken, als die *n* Vorstellungen *b* zusammengenommen. Dieser Ausdruck ist aber einer doppelten Auslegung fähig, indem man dabei auch an *n* unverschmolzene, ohne Verbindung gleichzeitig *B* entgegenwirkende Vorstellungen denken könnte. Die Folge wird jedoch lehren,* dass in diesem Sinne die *n* Vorstellungen *b* zusammen von *B* nicht mehr hemmen, als eine einzige solche Vorstellung schon thun würde, und der ganze Unterschied nur darin besteht, dass im ersteren Falle die Hemmung, die jedes *b* erleidet, nur der *n*te Theil der Hemmung ist, die es erleiden würde, wenn es allein stände. Wollte man also das obige «zusammengenommen» in diesem Sinne deuten, so würde man auf die Ungereimtheit kommen, dass eine Vorstellung zugleich ihr eignes Vielfaches wäre. Der Grund, weshalb

* S. §. 47, 5; §. 49, 5; §. 50, 5.

nur die erste Auslegung zulässig ist, beruht darauf, dass bei der Erklärung nicht nur auf das, was die Vorstellung wirkt, sondern auch zugleich auf das, was sie leidet, Rücksicht genommen werden muss.

31.

Da nach §. 28. und 29. auch entgegengesetzte und disparate Vorstellungen einander gleich sein können, so erhellt vermöge der Erklärungen des vorigen §'s leicht, dass und in welchem Sinne die Intensität einer Vorstellung auch das Vielfache von der Intensität einer ihr entgegengesetzten oder disparaten Vorstellung sein kann.

Ist nun die Intensität von A das m-fache irgend einer andern Vorstellung b, B aber das n-fache der nämlichen, so wird man sagen können, dass sich die Intensitäten von A und B zu einander wie die ganzen Zahlen m und n verhalten.

Es können aber auch zwei Vorstellungen Intensitäten haben, deren Verhältniss durch zwei gebrochene Zahlen $\frac{\mu}{\mu'} : \frac{\nu}{\nu'}$ ausgedrückt wird. Denn da dies dem Verhältniss $\mu\nu' : \mu'\nu$ gleich ist, so bedeutet dies nur, dass die Intensität der ersten Vorstellung als das $\mu\nu'$-fache, die der zweiten als das $\mu'\nu$-fache einer und derselben dritten Vorstellung anzusehen ist.

Die das Verhältniss zweier Intensitäten ausdrückenden Zahlen m, n können endlich auch irrational sein. Denn es lassen sich dann immer zwei ganze positive Zahlen μ, ν von der Beschaffenheit finden, dass

$$\frac{m}{n} > \frac{\mu}{\nu}, \text{ also } m\nu > n\mu,$$

$$\text{aber } \frac{m}{n} < \frac{\mu+1}{\nu}, \text{ also } m\nu < n(\mu+1),$$

und die Verhältnisse $\frac{\mu}{\nu}$, $\frac{\mu+1}{\nu}$ durch Vergrösserung von μ und ν der Gleichheit so nahe kommen, als man will. Liegen nun die Intensitäten von A und B zwischen denselben Grenzverhältnissen wie m und n, so werden sie diesen irrationalen Zahlen proportional zu setzen sein. Diese Voraussetzung wird

aber in der That stattfinden, wenn *A* und *B* einer Vorstellung *C* in gleichem Grade entgegengesetzt sind, und diese, welche Werthe auch μ und ν haben mögen, durch eine Vorstellung von der ν-fachen Intensität von *A* im Gleichgewicht stärker gehemmt, ihre Klarheit also stärker vermindert wird, als durch eine Vorstellung, deren Intensität das μ-fache der Intensität von *B* ist, dagegen schwächer als durch eine Vorstellung von der $(\mu+1)$-fachen Intensität der *B*. Denn dann ist offenbar

$$\nu.\text{Intens. } A > \mu.\text{Intens. } B$$
$$< (\mu+1) \text{ Intens. } B,$$

also
$$\frac{\text{Intens. } A}{\text{Intens. } B} > \frac{\mu}{\nu}, \text{ aber } < \frac{\mu+1}{\nu}.$$

Vermöge der Allgemeinheit der Erklärung der Gleichheit der Intensitäten erhellt von selbst, dass auch disparate Vorstellungen in irrationalen Verhältnissen stehen können.

32.

Da die Grösse der Hemmung einer Vorstellung derjenige Theil der ihr zum Grunde liegenden Thätigkeit des Vorstellens ist, der in Folge der Einwirkung entgegengesetzter Vorstellungen die Form des Strebens vorzustellen annimmt (§. 9. und 14.), so wird diese Grösse offenbar durch dasselbe Maass wie die Intensität bestimmt. Zugleich ergiebt sich von selbst, dass die Hemmung niemals grösser als die Intensität werden kann. Zieht man die Hemmung von der Intensität ab, so zeigt der Rest, der kurzweg der Rest der Vorstellung heissen mag, die Quantität des noch übrigen freien Vorstellens an.

Neben dieser absoluten Grösse der Hemmung kann man noch eine relative Grösse derselben oder einen Grad der Hemmung* unterscheiden, die durch den Bruch ausgedrückt wird, dessen Zähler die absolute Grösse der Hemmung, und dessen Nenner die Intensität der gehemmten Vorstellung ist.

---

* Herbart bezeichnet öfter durch Hemmungsgrad den Grad des Gegensatzes, was aber nach dem Obigen zu Missverständnissen Veranlassung giebt.

Sei z. B. die Intensität einer Vorstellung $= a$, ihre absolute Hemmung $= h$, so ist $\frac{h}{a}$ ihre relative oder der Grad ihrer Hemmung. Ebenso kann man von der absoluten Grösse des Restes eine relative oder einen Grad der Freiheit der Vorstellung unterscheiden, der in ähnlicher Weise bestimmt wird und im vorstehenden Beispiel durch $\frac{a-h}{a}$ auszudrücken sein würde.

Der kleinste Werth dieser Grade der Hemmung und Freiheit der Vorstellungen ist $= 0$, der grösste $= 1$.

33.

Mit der Zunahme der Hemmung und der Abnahme des Restes einer Vorstellung nimmt ihre Klarheit ab. Diese ist aber eine Grösse von andrer Benennung als die Hemmung und Intensität und kann nicht durch dasselbe Maass wie diese gemessen werden. Denn die Klarheit ist eine quantitative Bestimmung der Vorstellung als eines in die innere Wahrnehmung fallenden Phänomens, Hemmung und Intensität aber beziehen sich auf die nicht unmittelbar zur Erscheinung kommende Ursache dieses Phänomens, die Thätigkeit des Vorstellens. Es ist nun jedenfalls die einfachste und in Ermangelung eines Gegengrundes jeder andern vorzuziehende Annahme,

1. die Grösse der ursprünglichen Klarheit einer Vorstellung (§. 2. und 7.) direct proportional der Intensität derselben,

2. die Grösse der einer Vorstellung übrig bleibenden Klarheit oder des Klarheitsrestes direct proportional dem Reste der Vorstellung (§. 32.) zu setzen.

Hieraus folgt dann von selbst, dass

3. die in Folge der Hemmung eingetretene Verminderung der Klarheit der Grösse der Hemmung direct proportional zu setzen sein wird.

Hiernach ist also, wenn k die ursprüngliche Klarheit einer Vorstellung von der Intensität a, k' den Klarheitsrest, den sie bei irgend einer Hemmung h hat, l die ursprüngliche Klarheit einer Vorstellung von der Intensität b bedeutet,

1. $k : l = a : b$, oder $k = \frac{al}{b}$;

2. $k : k' = a : a - h$, oder $k' = (\frac{a-h}{a})\, k$;

woraus

3. $k - k' = \frac{hk}{a}$.

34.

Hieraus erhellt, dass, wenn die Grösse der ursprünglichen Klarheit l einer Vorstellung von der Intensität b zur Maasseinheit angenommen wird, für eine andre Vorstellung von der Intensität a sowohl die ursprüngliche Klarheit als die Verminderung derselben und der Klarheitsrest blos mittels der Intensitäten beider Vorstellungen ausgedrückt werden können. Da es willkürlich ist, von welcher Vorstellung man die Intensität zur Maasseinheit der Intensitäten aller andern Vorstellungen annehmen will, so kann man dazu diejenige wählen, deren ursprüngliche Klarheit man zugleich zur Maasseinheit für die Klarheit macht. Alsdann ist für $b = 1$ zugleich $l = 1$, daher

$$k = a, \quad k' = a - h, \quad k - k' = h.$$

Es würde demnach ohne die vorstehende Erläuterung scheinen, als ob die ursprüngliche Klarheit der Intensität, die verminderte Klarheit dem Reste der Vorstellung, der Klarheitsverlust der Hemmung gleich gesetzt würde, was, wenn es im eigentlichen Sinne so wäre, eine Begriffsverwirrung genannt werden müsste. Es wird aber im Folgenden sehr zur Abkürzung der Formeln beitragen, wenn wir uns der vorstehenden Voraussetzung bedienen, indem wir uns dadurch ohne Aufopferung der Gründlichkeit eine besondre Bezeichnung der auf die Klarheit bezüglichen Grössen gänzlich ersparen können.

Zweiter Abschnitt.

Vom Gleichgewicht einfacher Vorstellungen.

I. Rechnungsprincipien.

35.

Wenn zwei oder mehrere durch sinnliche Wahrnehmung erzeugte entgegengesetzte Vorstellungen gleichzeitig ins Bewusstsein treten, so sind sie zwar im ersten Moment sämmtlich ungehemmt, aber es entsteht sofort zwischen ihnen ein gegenseitiges Streben sich aus dem Bewusstsein zu verdrängen, zu Folge dessen jede Vorstellung bis zu einem gewissen Grade allmälig gehemmt wird. Unter diesen Umständen stellt sich nun als nächste Ursache dieser Hemmung jeder der Vorstellungen das Quantum des Entgegengesetzten dar, das in allen übrigen zusammengenommen enthalten ist. Es wird offenbar bestimmt durch die Summe der Producte aus den Gegensätzen der von der Hemmung betroffenen Vorstellung zu allen übrigen in die beziehungsweise zu nehmenden Intensitäten derselben. Sind also z. B. drei Vorstellungen von den Intensitäten a, b, c gegeben, für welche m, n, p bezüglich die Gegensätze der ersten und zweiten, zweiten und dritten, dritten und ersten bezeichnen, so ist

für a das Quantum des Entgegengesetzten $= mb + pc$,
für b dasselbe . . . . $= nc + ma$,
für c dasselbe . . . . $= pa + nb$.

36.

Dieses Quantum des Entgegengesetzten kann jedoch nur dann als ein wirksames Streben angesehen werden, wenn die Vorstellungen, in denen es enthalten ist, vorzugsweise als activ betrachtet werden. Wir wollen dieses active Verhalten als das gegen eine der gegebenen Vorstellungen

gerichtete Hemmungsstreben aller übrigen, die Vorstellungen, von denen es ausgeht, als die activen bezeichnen, und es für jetzt noch unentschieden lassen, ob ein solches in Bezug auf jede Vorstellung stattfindet oder nicht. Jedenfalls aber kann sich die dadurch betroffene Vorstellung gegen dieses Streben nicht rein passiv verhalten, sie widerstrebt vielmehr der Hemmung, wirkt auf die activen Vorstellungen zurück und nöthigt diese zur Uebernahme eines Theils der Hemmung, die ohne diese Rückwirkung auf sie allein fallen würde. Hierdurch entstehen aber weitere Rückwirkungen zwischen den activen Vorstellungen selbst; denn jede derselben strebt sich auf Kosten der übrigen so viel als möglich von der Hemmung frei zu erhalten. Hieraus geht hervor, dass ein ursprünglich nur gegen eine der gegebenen Vorstellungen gerichtetes Hemmungsstreben eine Hemmung aller zur Folge haben muss.

37.

Es kommt nun weiter in Frage, ob anzunehmen ist, dass für jede der gegebenen Vorstellungen ein solches Hemmungsstreben aller übrigen wirklich stattfinde, ob also alle Vorstellungen gegen alle sich activ verhalten, oder dieses immer nur auf eine einzige von allen andern ausgeübt wird. Es ist allerdings nothwendig, jeder Vorstellung eine ihren Gegensätzen zu den übrigen entsprechende Wirksamkeit auf diese insgesammt zuzuerkennen; es ist aber nicht nothwendig, dass diese für alle eine active, aggressive sei, alle Vorstellungen gegen alle andrängen, sie kann sich vielmehr auch blos als Reaction äussern, wodurch sie sich so viel als möglich von ihrer Freiheit erhält. Es ist nur erforderlich, dass gegen eine einzige der gegebenen Vorstellungen ein Hemmungsstreben aller übrigen gerichtet sei, um alle in gewissem Grade zu hemmen. Offenbar aber müsste die Summe des von allen zusammengenommen zu Hemmenden weit grösser sein, wenn auf jede, als wenn nur auf eine der gegebenen Vorstellungen ein Hemmungsstreben von den übrigen ausginge. Erwägt man nun, dass die Vorstellungen ihre Hemmungen sich gegenseitig selbst auflegen, und keine äussere Ursache sie hervorbringt, dass ferner alle

dahin streben, so frei zu bleiben als nur immer möglich, so ist ein solches gegenseitiges Verhalten der Vorstellungen anzunehmen, bei dem ihnen die möglich kleinste Summe von Hemmungen auferlegt wird. Dies ist aber nur dann der Fall, wenn gegen eine einzige der gegebenen Vorstellungen ein actives Hemmungsstreben von allen übrigen ausgeht.

38.

Nach dem so eben ausgesprochenen Princip entscheidet sich zugleich, gegen welche von den gegebenen Vorstellungen dieses Hemmungsstreben gerichtet sein wird: nämlich gegen diejenige, der das kleinste Quantum des entgegengesetzten Vorstellens gegenübersteht.* Dieses Quantum bestimmt nämlich die Grösse des Strebens und drückt die Summe des von allen Vorstellungen zusammengenommen zu Hemmenden oder die Hemmungssumme aus, die wir, da dieser Ausdruck im Folgenden häufig wiederkehrt, abgekürzt durch HS. bezeichnen wollen. Für zwei im Grade m entgegengesetzte Vorstellungen von den Intensitäten a, b ist also, wenn $a > b$, die HS. $= mb$, da dies kleiner als ma. Für drei Vorstellungen von den Intensitäten $a > b > c$ ist, wenn m, n, p bezüglich die Gegensätze zwischen a und b, b und c, c und a bedeuten, die HS. die kleinste der drei Summen

$$mb + pc, \quad nc + ma, \quad pa + nb.$$

Welche dies ist, hängt im Allgemeinen von den numerischen

* Wären Ausdrücke, die zur Verfolgung von Analogieen verleiten, welche von der Betrachtung der Sache selbst ablenken und leicht dazu verführen, sie nach einer ihrer Natur unangemessenen Musterform zu modeln, weniger gefährlich, so würden wir hier sagen können: von den gegebenen Vorstellungen gravitiren gleichsam gegen eine derselben alle übrigen, und zwar immer gegen diejenige, welche dadurch einen geringeren Druck erfährt als jede andre unter den nämlichen Umständen erfahren würde. Das Quantum des Entgegengesetzten würde hier die Stelle des Gewichts einnehmen. Die Vertheilung des Drucks unter alle Vorstellungen könnte dabei vielleicht als Analogie zu der allseitigen Fortpflanzung des Druckes in einem flüssigen Körper angesehen werden. Aber wir sind weit entfernt, die Verfolgung solcher Analogieen zu empfehlen.

Werthen der sechs gegebenen Grössen ab. Doch findet sich leicht, dass, wenn $n > m > p$, oder $n > p > m$, allgemein die HS. $= mb + pc$ sein wird. Jedenfalls kann man sagen, dass die HS. für drei Vorstellungen die Form

$$\mu a + \nu b + \pi c$$

hat, in der einer der drei Coëfficienten immer $= 0$ ist, die beiden andern zweien der drei Gegensätze bezüglich gleich sind. Es ist nämlich,

$$\begin{array}{llll} \text{wenn } \mu = 0, & \nu = m, & \pi = p, \\ \;\;\;„\;\; \nu = 0, & \mu = m, & \pi = n, \\ \;\;\;„\;\; \pi = 0, & \mu = p, & \nu = n. \end{array}$$

Auf ähnliche Weise kann auch für mehr als drei Vorstellungen die Grösse der HS. bestimmt werden.

39.

Ist nun die Hemmungssumme gleichzeitig gegebener Vorstellungen bestimmt, so fragt es sich weiter, wie viel davon auf jede einzelne kommt, oder, was dasselbe, nach welchen Verhältnissen sich die HS. auf die einzelnen Vorstellungen vertheilt. Sind nun erstens sowohl die Intensitäten der Vorstellungen als die Gegensätze zwischen je zweien derselben unter einander gleich, so ist offenbar kein Grund vorhanden, weshalb eine Vorstellung mehr gehemmt werden sollte als die andre. Die HS. vertheilt sich also in diesem Falle gleichmässig unter die Vorstellungen, von denen jede den sovielten Theil der HS., als die Anzahl der Vorstellungen Einheiten hat, als die ihr zukommende Hemmung übernimmt.

Dagegen wird zweitens bei ungleichen Intensitäten die stärkere Vorstellung unter übrigens gleichen Umständen sich immer nur in geringerem Grade hemmen lassen als die schwächere. Denn sie vermag der Nöthigung zur Hemmung mit mehr Erfolg zu widerstehen, oder, wie wir es auch ausdrücken können, sie besitzt eine geringere Nachgiebigkeit gegen das von den entgegengesetzten Vorstellungen ausgehende Streben sie zu hemmen. Wir nehmen nun als das Einfachste an, dass diese Nachgiebigkeit der Intensität umgekehrt proportional sei und dass daher unter übrigens gleichen Umständen, d. h. bei

durchaus gleichen Gegensätzen, die Hemmungen der einzelnen Vorstellungen sich zu einander umgekehrt verhalten wie die Intensitäten dieser Vorstellungen.

40.

Sind drittens die Intensitäten gleich, die Gegensätze aber ungleich, so kann sich die HS. ebenso wenig wie im zweiten Falle gleichförmig unter die Vorstellungen vertheilen. Da nun die Vorstellungen nur sofern sie entgegengesetzt sind auf einander wirken und zurückwirken, und die Grösse dieser Wirkungen mit der Grösse des Gegensatzes ab- und zunimmt, so liegt es am nächsten, die Hemmung, die jede Vorstellung von den Wirkungen oder Rückwirkungen der übrigen zu leiden hat, proportional der Summe der Gegensätze, in denen sie zu diesen letzteren steht, anzunehmen. Es könnte zwar auf den ersten Anblick noch natürlicher scheinen, sie dem Producte dieser Gegensätze proportional zu setzen; allein dann würde, wenn man einen der Gegensätze $= 0$ setzte, das ganze Product verschwinden und damit die ungereimte Folge sich ergeben, dass dann jene Vorstellung ungehemmt bliebe, indess doch dadurch, dass an die Stelle einer ihr entgegengesetzten Vorstellung eine nicht entgegengesetzte tritt (was das Verschwinden eines Gegensatzes bedeutet), ihre Hemmung nur kleiner werden kann, wie dies bei der Annahme einer der Summe der Gegensätze proportionalen Hemmung wirklich geschieht. Hiernach werden also die Hemmungen von drei der Intensität nach gleichen Vorstellungen $a, b, c,$ die der Reihe nach (wie in §. 38.) in den Gegensätzen m, n, p stehen, bezüglich den Summen $$m+p, \quad m+n, \quad n+p$$ proportional anzunehmen sein.*

Sind viertens sowohl Intensitäten als Gegensätze ungleich, so sind die Annahmen des zweiten und dritten Falls mit einander zu verbinden und das Verhältniss der Hemmungen der

* Es kömmt auf dasselbe hinaus, wenn man statt dessen sagt, die Hemmungen seien proportional den arithmetischen Mitteln der Gegensätze jeder einzelnen Vorstellung gegen alle übrigen.

Vorstellungen aus dem directen Verhältniss der Summen der Gegensätze einer jeden zu allen übrigen und dem umgekehrten ihrer Intensitäten zusammenzusetzen. Für drei Vorstellungen sind diese Verhältnisszahlen also

$$\frac{m+p}{a}, \quad \frac{m+n}{b}, \quad \frac{n+p}{c}.$$

41.

Wenn sich nun die Hemmungssumme diesen Verhältnissen gemäss auf die Vorstellungen vertheilt hat, so ist eine Ursache zu einer weiteren Veränderung der Hemmungen nicht mehr vorhanden. Denn einerseits ist dann in der Gesammtheit so viel gehemmt, als das der Hemmungssumme gleiche Hemmungsstreben (vgl. §. 38.) fordert, andrerseits aber auch zugleich die Vertheilung derselben sowohl den von der Ungleichheit der Gegensätze herrührenden ungleichen Einwirkungen der Vorstellungen auf einander, als auch der durch die Ungleichheit der Intensitäten bedingten ungleichen Nachgiebigkeit gegen jene Einwirkungen entsprechend. Es lastet dann auf jeder ein Theil des von dem Hemmungsstreben ausgehenden Gesammtdruckes, der aber durch ein der Grösse des Gehemmten gleiches Widerstreben getragen wird. Es besteht also jetzt zwischen den Vorstellungen Gleichgewicht. So lange die Summe des Gehemmten noch nicht der Summe des zu Hemmenden oder der Hemmungssumme gleich ist, wirkt das Hemmungsstreben als Ursache aller Hemmung fort und die Vorstellungen müssen noch mehr sinken. Aber auch wenn die Summe des Gehemmten der Hemmungssumme gleich geworden ist, würde, wenn die Vertheilung derselben den angegebenen Hemmungsverhältnissen nicht gemäss wäre, noch nicht Ruhe eintreten, sondern die überlasteten würden sich von dem Uebermaass der Hemmung zu befreien streben, steigen und die zu wenig gehemmten zum Sinken nöthigen.

Alles zusammengefasst beruht also die Berechnung der für das Gleichgewicht erforderlichen Hemmungen gleichzeitig gegebener entgegengesetzter Vorstellungen auf der Bestimmung 1. der Grösse der Hemmungssumme und 2. der durch ihre

Intensitäten und Gegensätze bedingten, den obigen Annahmen gemässen Hemmungsverhältnisse.

II. Entwickelung allgemeiner Formeln.

42.

Seien gegeben zwei voll (also im Grade 1) entgegengesetzte Vorstellungen von den Intensitäten a, b; man sucht die ihrem Gleichgewicht entsprechenden, bezüglich durch x, y zu bezeichnenden Hemmungen.*

1. Was zuerst die Hemmungsverhältnisse betrifft, so sind sie, da es hier eine eigentliche Summe von Gegensätzen nicht giebt, sondern diese sich auf das einzige Glied 1 reducirt, nach §. 39., bezüglich für a und b... $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$. Setzen wir demnach vorläufig die HS. $=S$ und bezeichnen durch N einen näher zu bestimmenden constanten Coëfficienten, so ist

$$x = \frac{NS}{a};\quad y = \frac{NS}{b}$$

zu setzen. Zugleich muss aber auch sein

$$x + y = S.$$

Aus diesen drei Gleichungen folgt

$$N = \frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{ab}{a+b};$$

$$\text{daher } x = \frac{\frac{1}{a}S}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{bS}{a+b};$$

$$y = \frac{\frac{1}{b}S}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{aS}{a+b}.$$

---

* Zur Abkürzung werden wir im Folgenden blos von Hemmungen schlechthin reden und darunter immer nur die dem Gleichgewicht entsprechenden, ebenso unter den «Vorstellungen a, b, c...» immer die Intensitäten derselben verstehen, was zu keinem Missverständniss führen kann, da die Qualitäten der Vorstellungen nicht Elemente der Rechnung sind. Endlich werden wir auch, wie schon zuvor die Hemmungssumme durch HS., die Hemmungsverhältnisse durch HV. abgekürzt bezeichnen.

2. Um S zu bestimmen, muss festgesetzt werden, welche von beiden Intensitäten die grössere sein soll. Sei also $a > b$, so ist (§. 38.) $S = b$, daher

$$x = \frac{bb}{a+b}; \quad y = \frac{ab}{a+b}.$$

3. Seien r und s bezüglich die Reste von a und b, so wird

$$r = a - x = \frac{aa + ab - bb}{a+b};$$

$$s = b - y = \frac{bb}{a+b}.$$

4. Wird $a = b$ gesetzt, so folgt

$$x = y = \tfrac{1}{2}a; \quad r = s = \tfrac{1}{2}a.$$

Zwei gleiche und voll entgegengesetzte Vorstellungen verlieren also im Gleichgewicht die Hälfte ihrer ursprünglichen Klarheit.*

43.

Unter übrigens gleichen Voraussetzungen wie im vorigen §. seien a und b nur im Grade m entgegengesetzt.

1. Die HV. sind dieselben wie in der vorigen Aufgabe. Denn sie sind zwar ursprünglich durch $\frac{m}{a}$, $\frac{m}{b}$ auszudrücken, der gemeinschaftliche Factor m aber kann unterdrückt werden. Es ist daher, wie zuvor,

$$x = \frac{bS}{a+b}; \quad y = \frac{aS}{a+b}.$$

2. Die HS. S wird aber jetzt (§. 38.), wenn $a > b$, $= mb$, daher

$$x = \frac{mbb}{a+b}; \quad y = \frac{mab}{a+b}.$$

3. Hieraus folgt

$$r = a - x = \frac{aa + ab - mbb}{a+b};$$

$$s = b - y = \frac{bb + ab - mab}{a+b}.$$

4. Für $a = b$ wird

$$x = y = \tfrac{1}{2}ma; \quad r = s = (1 - \tfrac{1}{2}m)a.$$

44.

Seien gegeben drei voll entgegengesetzte Vorstellungen a, b, c; man sucht ihre Hemmungen x, y, z und Reste r, s, t.

---

* Vgl. das in §. 34. über die Klarheit Gesagte.

1. Die HV. sind $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$. Setzt man nun die HS. $= S$ und versteht unter N, wie in §. 42., einen näher zu bestimmenden Zahlencoëfficienten, so ist

$$x = \frac{NS}{a}; \quad y = \frac{NS}{b}; \quad z = \frac{NS}{c};$$

folglich, da zugleich

$$x + y + z = S$$

sein muss,

$$N = \frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} = \frac{abc}{ab+ac+bc};$$

daher

$$x = \frac{\frac{1}{a}S}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} = \frac{bcS}{ab+ac+bc};$$

$$y = \frac{\frac{1}{b}S}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} = \frac{acS}{ab+ac+bc};$$

$$z = \frac{\frac{1}{c}S}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} = \frac{abS}{ab+ac+bc}.$$

2. Die HS. ist (§. 38.) die kleinste der drei Summen $b+c$, $a+c$, $a+b$. Nehmen wir an, es sei $a>b>c$, so ist also

$$S = b + c;$$

daher

$$x = \frac{bc(b+c)}{ab+ac+bc};$$

$$y = \frac{ac(b+c)}{ab+ac+bc};$$

$$z = \frac{ab(b+c)}{ab+ac+bc}.$$

3. Hieraus folgt

$$r = a - x = \frac{aa(b+c) - bc(b+c-a)}{ab+ac+bc};$$

$$s = b - y = \frac{bb(a+c) - acc}{ab+ac+bc};$$

$$t = c - z = \frac{cc(a+b) - abb}{ab+ac+bc}.$$

4. Für $a = b = c$ wird

$$x = y = z = \tfrac{2}{3}a \text{ und}$$

$$r = s = t = \tfrac{1}{3}a.$$

Drei gleiche und voll entgegengesetzte Vorstellungen behalten also im Gleichgewicht nur den dritten Theil ihrer ursprünglichen Klarheit.

45.

Unter übrigens gleichen Voraussetzungen wie im vorigen §. sei der Gegensatz sämmtlicher drei Vorstellungen, paarweise genommen, $= m$.

1. Die HV. bleiben dieselben wie im vorigen §., da m als gemeinsamer Factor ausfällt (wie in §. 43.). Es gelten also auch jetzt die im vor. §. unter 1. gefundenen Formeln.

2. Die HS. ist die kleinste der drei Summen $m(b+c)$, $m(a+c)$, $m(a+b)$, also, wenn $a>b>c$,

$$S = m(b+c);$$

folglich

$$x = \frac{mbc(b+c)}{ab+ac+bc};$$

$$y = \frac{mac(b+c)}{ab+ac+bc};$$

$$z = \frac{mab(b+c)}{ab+ac+bc}.$$

3. Hieraus folgt

$$r = \frac{aa(b+c)-bc[m(b+c)-a]}{ab+ac+bc};$$

$$s = \frac{bb(a+c)-ac[m(b+c)-b]}{ab+ac+bc};$$

$$t = \frac{cc(a+b)-ab[m(b+c)-c]}{ab+ac+bc}.$$

4. Für $a=b=c$ wird

$$x = y = z = \tfrac{2}{3}ma;$$

$$r = s = t = \tfrac{1}{3}ma.$$

46.

Seien, wie zuvor a, b, c die gegebenen Vorstellungen, von denen aber a zu b den Gegensatz m, b zu c den Gegensatz n, c zu a den Gegensatz p haben mag (wie in §. 38. u. 40.), welche Beziehungen wir übersichtlich durch folgendes Schema andeuten können:

$$\begin{matrix} & & c & & \\ & p & & n & \\ a & & m & & b \end{matrix}$$

Die Hemmungen seien, wie zuvor, x, y, z, die Reste r, s, t.

1. Nach §. 40. sind jetzt die HV. $\frac{m+p}{a}$, $\frac{m+n}{b}$, $\frac{n+p}{c}$; daher, wenn N und S dieselbe Bedeutung wie in den vorigen §§. haben,

$$x = \frac{(m+p)NS}{a}; \quad y = \frac{(m+n)NS}{b}; \quad z = \frac{(n+p)NS}{c}.$$

folglich, da

$$x+y+z = S,$$

$$N = \frac{1}{\frac{m+p}{a}+\frac{m+n}{b}+\frac{n+p}{c}} = \frac{abc}{(n+p)ab+(m+n)ac+(m+p)bc};$$

daher

$$x = \frac{(m+p)bcS}{(n+p)ab+(m+n)ac+(m+p)bc};$$

$$y = \frac{(m+n)acS}{(n+p)ab+(m+n)ac+(m+p)bc};$$

$$z = \frac{(n+p)abS}{(n+p)ab+(m+n)ac+(m+p)bc}.$$

2. Die HS. ist (§. 38.) die kleinste der drei Summen $mb+pc$, $ma+nc$, $pa+nb$ und kann im Allgemeinen durch

$$S = \mu a + \nu b + \pi c$$

bezeichnet werden (wo immer einer der drei Coëfficienten $= 0$), welcher Ausdruck also in den vorstehenden Formeln zu substituiren ist. Setzen wir zur Abkürzung $m+p=\alpha$, $m+n=\beta$, $n+p=\gamma$, so folgt

$$x = \frac{\alpha bc(\mu a+\nu b+\pi c)}{\gamma ab+\beta ac+\alpha bc};$$

$$y = \frac{\beta ac(\mu a+\nu b+\pi c)}{\gamma ab+\beta ac+\alpha bc};$$

$$z = \frac{\gamma bc(\mu a+\nu b+\pi c)}{\gamma ab+\beta ac+\alpha bc}.$$

3. Hieraus ergeben sich die Reste

$$r = \frac{aa(\gamma b+\beta c)-\alpha bc(\mu a+\nu b+\pi c-a)}{\gamma ab+\beta ac+\alpha bc};$$

$$s = \frac{bb(\gamma a+\alpha c)-\beta ac(\mu a+\nu b+\pi c-b)}{\gamma ab+\beta ac+\alpha bc};$$

$$t = \frac{cc(\beta a+\alpha b)-\gamma ab(\mu a+\nu b+\pi c-c)}{\gamma ab+\beta ac+\alpha bc}.$$

47.

Die speciellen Fälle der vorstehenden Formeln verdienen eine ausführlichere Betrachtung.

1. Ist $m = n = p$, also auch $\alpha = \beta = \gamma = 2m$, so ist, unter der Voraussetzung, dass $a > b > c$, $\mu = 0$, $\nu = \pi = m$ zu setzen (§. 38.). Alsdann reduciren sich die Formeln auf die des §. 45., wie es sein muss.

2. Ist $m > n > p$, aber $a = b = c$, so wird

$$S = (n + p) a = \gamma a;$$

daher

$$x = \frac{\alpha\gamma a}{\alpha + \beta + \gamma} = \frac{(m + p)(n + p) a}{2(m + n + p)};$$

$$y = \frac{\beta\gamma a}{\alpha + \beta + \gamma} = \frac{(m + n)(n + p) a}{2(m + n + p)};$$

$$z = \frac{\gamma\gamma a}{\alpha + \beta + \gamma} = \frac{(n + p)(n + p) a}{2(m + n + p)};$$

woraus die Reste ohne eine weitere bemerkenswerthe Zusammenziehung ihrer Ausdrücke sich von selbst ergeben.

3. Sei $a > b > c$, aber einer der Gegensätze, z. B. $p = 0$, so kann dies nur bedeuten, dass die beiden Vorstellungen a, c nicht mehr entgegengesetzt, sondern von einerlei Qualität sind. Sie müssen also gegen die dritte Vorstellung b denselben Gegensatz haben; es ist also zugleich $n = m$ zu setzen. Alsdann wird die HS. $= mb$. Denn das Quantum des Entgegengesetzten ist für a nur $= mb$, für b aber $= m(a + c)$ und für c... $= mb$; also das kleinste mb. In den Formeln des vorigen §'s wird also jetzt $\alpha = m$, $\beta = 2m$, $\gamma = m$, $\mu = \pi = 0$, $\nu = m$; daher

$$x = \frac{mbbc}{ab + 2ac + bc};$$

$$y = \frac{2mabc}{ab + 2ac + bc};$$

$$z = \frac{mabb}{ab + 2ac + bc}.$$

4. Komme zu den Voraussetzungen der vorigen Nummer noch hinzu $c = a$, so stehen der Vorstellung b zwei Vorstellungen a von gleicher Intensität und Qualität gegenüber. Es wird dann

$$x = z = \frac{mbb}{2(a+b)};$$

$$y = \frac{mab}{a+b}.$$

Vergleicht man diese Formeln mit den Ausdrücken für x und y in §. 43, 2., so zeigt sich, dass die Vorstellung b durch die beiden nach Intensität und Qualität gleichen, ihr im Grade m entgegengesetzten Vorstellungen $a = c$ nicht mehr gehemmt wird, als dies durch eine derselben geschehen würde; dass aber jede der beiden Vorstellungen $a = c$ nur halb so viel gehemmt wird, als der Fall sein würde, wenn eine von ihnen allein b gegenüberstände. Die beiden Vorstellungen a behalten also jetzt eine grössere Klarheit, indess der Klarheitsverlust von b derselbe ist, mag ihm nur ein a oder zwei gegenüberstehen.

5. Eine andre Vergleichung bietet sich für die Formeln der vorstehenden Nr. dar, wenn wir in §. 43, 2. a mit $2a$ vertauschen, also annehmen, dass b eine Vorstellung von der Intensität $2a$ im Grade m entgegengesetzt sei. Dann ergiebt sich nämlich

die Hemmung von $2a ... = \frac{mbb}{2a+b}$, die Hemmung von $b ... = \frac{2mab}{2a+b}$.

Die HS. ist hier wie in den vorigen Fällen $= mb$, aber sie vertheilt sich nach andern Verhältnissen. Offenbar wird hier nämlich b durch den Gegensatz zu der einzigen Vorstellung $2a$ stärker gehemmt, als wenn ihm zwei einzelne Vorstellungen a gegenüberstehen; denn es ist allgemein

$$\frac{2mab}{2a+b} > \frac{mab}{a+b}.$$

Dagegen ist die Hemmung $\frac{mbb}{2a+b}$ der einzigen Vorstellung $2a$ geringer als die Summe der Hemmungen der einzeln b gegenüberstehenden zwei Vorstellungen a, welche Summe

$$= 2 \cdot \frac{mbb}{2(a+b)} = \frac{mbb}{a+b} \text{ ist.}$$

Es zeigt sich hier zum ersten Mal der Unterschied zwischen der Wirksamkeit von zwei nach Intensität und Qualität gleichen, aber einzelnen, nicht verbundenen Vorstellungen und derjenigen einer Vorstellung, die doppelt so stark ist als jede

jener einzelnen und als eine Verschmelzung derselben in eine einzige Vorstellung angesehen werden kann (vgl. §. 30.).

6. Wollte man in den Formeln der ersten Nr. des vor. §'s zwei Gegensätze gleich Null setzen, z. B. $n = p = 0$, so würde es keine Vorstellung c geben, die dieser Annahme genügen könnte; denn es ist keine Qualität denkbar, die mit zwei unter einander im Grade m entgegengesetzten Qualitäten zugleich identisch wäre. Es ist also c hier als eine gar nicht vorhandene, oder gleichsam nur imaginäre Vorstellung zu betrachten. Die citirten Formeln führen auf dasselbe Resultat; denn sie geben für $n = p = 0$

$$x = \frac{bS}{a+b}; \quad y = \frac{aS}{a+b}; \quad z = 0;$$

wo offenbar $S = mb$ zu setzen ist. Die Hemmungen von a und b sind also in der That dieselben, welche diese Vorstellungen haben müssen, wenn sie einander allein gegenüberstehen (§. 43.), und die Hemmung der imaginären dritten Vorstellung ist Null. Die Hemmungsformeln für zwei Vorstellungen zeigen sich hiermit zugleich als specieller Fall derer für drei.

48.

Seien jetzt von vier in beliebigen Intensitäten und Gegensätzen gegebenen Vorstellungen a_1, a_2, a_3, a_4 die zugehörigen Hemmungen, die durch x_1, x_2, x_3, x_4 bezeichnet werden mögen, zu berechnen.

1. Da die vier Vorstellungen sechs Verbindungen zu zweien geben, so finden zwischen ihnen sechs verschiedene Gegensätze statt, von denen wir den zwischen a_1 und a_2 durch $m_{1,2}$, den zwischen a_1 und a_3 durch $m_{1,3}$, ebenso den zwischen a_2 und a_3 durch $m_{2,3}$ bezeichnen wollen u. s. f. Haben dann N und S dieselbe Bedeutung wie zuvor, so ist (nach §. 40.) zu setzen:

$$x_1 = \frac{m_{1,2} + m_{1,3} + m_{1,4}}{a_1} NS;$$

$$x_2 = \frac{m_{1,2} + m_{2,3} + m_{2,4}}{a_2} NS;$$

$$x_3 = \frac{m_{1,3} + m_{2,3} + m_{3,4}}{a_3} NS;$$

$$x_4 = \frac{m_{1,4} + m_{2,4} + m_{3,4}}{a_4} NS;$$

woraus in Verbindung mit der Gleichung

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = S$$

sich ergiebt:

$$\frac{1}{N} = \frac{m_{1,2} + m_{1,3} + m_{1,4}}{a_1} + \frac{m_{1,2} + m_{2,3} + m_{2,4}}{a_2} + \frac{m_{1,3} + m_{2,3} + m_{3,4}}{a_3} + \frac{m_{1,4} + m_{2,4} + m_{3,4}}{a_4}.$$

2. Die HS. S ist die kleinste der vier Summen

$$m_{1,2}a_2 + m_{1,3}a_3 + m_{1,4}a_4;$$
$$m_{1,2}a_1 + m_{2,3}a_3 + m_{2,4}a_4;$$
$$m_{1,3}a_1 + m_{2,3}a_2 + m_{3,4}a_4;$$
$$m_{1,4}a_1 + m_{2,4}a_2 + m_{3,4}a_3;$$

und kann im Allgemeinen durch

$$\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \mu_3 a_3 + \mu_4 a_4$$

dargestellt werden, wo einer der vier Coëfficienten immer $= 0$ sein muss, jeder der andern aber einem der sechs verschiedenen Gegensätze gleich ist.

49.

Wir ziehen aus diesen Resultaten einige bemerkenswerthe Folgerungen.

1. Sind alle sechs Gegensätze gleich, also etwa $= m$, so wird, wenn $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$, $S = m\,(a_2 + a_3 + a_4)$; alsdann vereinfachen sich die Ausdrücke der Hemmungen in folgende:

$$x_1 = \frac{m(a_2 + a_3 + a_4)}{a_1\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4}\right)};$$

$$x_2 = \frac{m(a_2 + a_3 + a_4)}{a_2\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4}\right)};$$

$$x_3 = \frac{m(a_2 + a_3 + a_4)}{a_3\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4}\right)};$$

$$x_4 = \frac{m(a_2 + a_3 + a_4)}{a_4\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4}\right)}.$$

2. Für ungleiche Gegensätze, aber gleiche Intensitäten treten ähnliche Vereinfachungen wie in §. 47, 2. ein, die wir der Kürze wegen übergehen.

3. Ist einer der Gegensätze, z. B. $m_{3,4}$, $= 0$, so sind die Vorstellungen, auf die er sich bezieht, also hier a_3, a_4, von gleicher Qualität; sie haben daher auch gegen die beiden noch übrigen Vorstellungen beziehungsweise gleiche Gegensätze. Mit $m_{3,4} = 0$ muss also zugleich $m_{1,4} = m_{1,3}$ und $m_{2,4} = m_{2,3}$ gesetzt werden, so dass nur drei verschiedene Gegensätze $m_{1,2}$, $m_{1,3}$, $m_{2,3}$ übrig bleiben.

Ist noch ein zweiter Gegensatz, z. B. $m_{1,4}$, $= 0$, daher auch $m_{1,3} = 0$, so muss $m_{2,4} = m_{2,3} = m_{1,2}$ werden, und es bleibt der einzige Gegensatz $m_{1,2}$ übrig, wofür wir nun schlechthin m schreiben wollen. Es stehen also jetzt die drei qualitativ gleichen Vorstellungen a_1, a_3, a_4 der a_2 im Grade m entgegen, und wird in den Formeln des vorigen §'s zu setzen sein

$$m_{3,4} = m_{1,4} = m_{1,3} = 0 \text{ und } m_{2,4} = m_{2,3} = m_{1,2} = m.$$

Hierdurch wird, wenn wir zur Abkürzung

$$\frac{1}{a_1} + \frac{3}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} = A$$

setzen,

$$x_1 = \frac{S}{a_1 A};\quad x_2 = \frac{3S}{a_2 A};\quad x_3 = \frac{S}{a_3 A};\quad x_4 = \frac{S}{a_4 A}.$$

Da $a_1 + a_3 + a_4 > a_2$, so wird $S = ma_2$, so dass wir endlich erhalten

$$x_1 = \frac{ma_2}{a_1\left(\frac{1}{a_1} + \frac{3}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4}\right)};$$

$$x_2 = \frac{3ma_2}{a_2\left(\frac{1}{a_1} + \frac{3}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4}\right)};$$

$$x_3 = \frac{ma_2}{a_3\left(\frac{1}{a_1} + \frac{3}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4}\right)};$$

$$x_4 = \frac{ma_2}{a_4\left(\frac{1}{a_1} + \frac{3}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4}\right)}.$$

4. Haben noch überdies die drei qualitativ gleichen Vorstellungen auch gleiche Intensität, so dass also $a_1 = a_3 = a_4$, so geben vorstehende Formeln

$$x_1 = x_3 = x_4 = \frac{ma_2\, a_2}{3(a_1 + a_2)};$$

$$x_2 = \frac{ma_1\, a_2}{a_1 + a_2}.$$

Vergleicht man, wie in §. 47, 4., diese Ausdrücke mit den Werthen von x und y in §. 43, 2., so zeigt sich, dass die Vorstellung a_2 durch die drei qualitativ und quantitativ gleichen, ihr im Grade m entgegengesetzten Vorstellungen $a_1 = a_3 = a_4$ nicht mehr gehemmt wird, als dies durch eine derselben geschehen würde; dass aber jede der drei gleichen Vorstellungen a_1, a_3, a_4 nur den dritten Theil so viel gehemmt wird, als der Fall sein würde, wenn eine von ihnen allein a_2 gegenüberstände.

5. Vertauscht man in §. 43, 2.... a mit $3a_1$ und b mit a_2, so dass also angenommen wird, es stehe eine Vorstellung $= 3a_1$ einer andern ihr im Grade m entgegengesetzten $= a_2$ gegenüber, so ergeben die dortigen Formeln

$$\text{die Hemmung von } 3a_1 \ldots = \frac{ma_2 a_2}{3a_1 + a_2},$$

$$\text{die Hemmung von } a_2 \ldots = \frac{3ma_1 a_2}{3a_1 + a_2}.$$

Die HS. ist hier wie in den vorigen Fällen $= ma_2$, ihre Vertheilung aber eine andre. Es ist nämlich die Hemmung von a_2 durch $3a_1$ stärker, als wenn ihr drei einzelne Vorstellungen von der Intensität a_1 gegenüberständen (wie in Nr. 4.); denn es ist allgemein

$$\frac{3ma_1 a_2}{3a_1 + a_2} > \frac{ma_1 a_2}{a_1 + a_2}.$$

Dagegen ist die Hemmung der einzigen Vorstellung $3a_1$, nämlich $\frac{ma_2 a_2}{3a_1 + a_2}$, kleiner als die Summe der Hemmungen der einzeln a_2 gegenüberstehenden drei Vorstellungen a_1, welche Summe $= 3 . \frac{ma_2 a_2}{3(a_1 + a_2)} = \frac{ma_2 a_2}{a_1 + a_2}$ ist. Es wiederholt sich also hier die in §. 47, 5. gemachte Bemerkung.

6. Setzt man bei vier gegebenen Vorstellungen a_1, a_2, a_3, a_4 die Gegensätze einer derselben, a_4, zu zweien andern, z. B. a_3 und a_1, gleich Null, also $m_{3,4} = m_{1,4} = 0$, ohne dass zugleich, wie in Nr. 3., auch $m_{1,3} = 0$ sein soll, so ist die Vorstellung a_4 als imaginär und so gut als nicht vorhanden zu betrachten, und eben deshalb auch ihr dritter Gegensatz $m_{2,4} = 0$ zu setzen, da nur eine reelle Vorstellung zu andern reellen einen Gegensatz haben kann. Die Formeln in §. 48, 1. reduciren sich dann auf

$$x_1 = \frac{m_{1,2}+m_{1,3}}{a_1}NS;\quad x_2 = \frac{m_{1,2}+m_{2,3}}{a_2}NS;$$

$$x_3 = \frac{m_{1,3}+m_{2,3}}{a_3}NS;\quad x_4 = 0;$$

$$\text{wo } \frac{1}{N} = \frac{m_{1,2}+m_{1,3}}{a_1} + \frac{m_{1,2}+m_{2,3}}{a_2} + \frac{m_{1,3}+m_{2,3}}{a_3}.$$

Vertauscht man hierin a_1, a_2, a_3 der Reihe nach mit der Bezeichnung a, b, c und ebenso $m_{1,2}$, $m_{2,3}$, $m_{1,3}$ mit m, n, p, so ergeben sich die in §. 46, 1. für drei Vorstellungen gefundenen Hemmungen, wodurch sich das Obige bestätigt. Zugleich stellen sich die Hemmungsformeln für drei Vorstellungen als einen speciellen Fall derer für vier dar.

50.

Es bedarf keiner neuen Formeln, um nunmehr allgemein zu übersehen, welche Ausdrücke für die Hemmungen von n paarweise entgegengesetzten Vorstellungen a_1, a_2, a_3,.... a_n sich finden werden.

1. Es wird nämlich die Hemmung jeder dieser Vorstellungen ein Bruchtheil der HS. sein, dessen Zähler der Quotient aus der Intensität der Vorstellung in die Summe ihrer Gegensätze zu allen übrigen, und dessen Nenner die Summe aller auf diese Weise bestimmten n Zähler ist.

2. Die HS. wird nach §. 38. bestimmt und hat die Form

$$\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \ldots + \mu_n a_n,$$

wo einer der Coëfficienten μ_1, μ_2, ... $= 0$ sein muss, jeder der übrigen einen der $\frac{1}{2}n(n-1)$ zwischen den Vorstellungen stattfindenden Gegensätze zum Werthe hat.

3. Sind alle Gegensätze einander gleich und $= m$, so wird, wenn $a_1 > a_2 > a_3 \ldots > a_n$, $S = m(a_2 + a_3 + \ldots + a_n)$, und daher für irgend eine Vorstellung a_n

$$x_n = \frac{m(a_2 + a_3 + \ldots + a_n)}{a_n\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots \frac{1}{a_n}\right)}.$$

4. Sind mit Ausnahme des Gegensatzes zwischen den beiden stärksten Vorstellungen a_1, a_2, der $= m$ sei, die Gegensätze aller übrigen Vorstellungen zu der stärksten a_1 Null, so müssen ihre Gegensätze gegen die zweite stärkste a_2 sämmt-

lich gleich, nämlich $= m$ sein. Sind noch überdies ihre Intensitäten gleich der von a_1, so wird $S = ma_2$, und

$$x_1 = x_3 = x_4 \ldots\ldots = x_n = \frac{ma_2 a_2}{(n-1)(a_1 + a_2)};$$

$$x_2 = \frac{ma_1 a_2}{a_1 + a_2}.$$

Die Vorstellung a_2 wird also durch die $n-1$ gleichen, ihr im Grade m entgegengesetzten, unter sich aber qualitativ gleichen Vorstellungen a_1 nicht mehr gehemmt als durch eine einzige derselben. Dagegen beträgt die Hemmung jedes der a_1 nur den $(n-1)$ten Theil der Hemmung, welche auf sie kommen würde, wenn sie der a_2 allein gegenüberstände.

5. Setzt man in §. 43, 2. $a = (n-1)a_1$ und $b = a_2$, so ergiebt sich

$$\text{die Hemmung von } (n-1)a_1 \ldots = \frac{ma_2 a_2}{(n-1)a_1 + a_2};$$

$$\text{die Hemmung von } a_2 \ldots \quad = \frac{m(n-1)a_1 a_2}{(n-1)a_1 + a_2}.$$

Dies zeigt, dass die Hemmung von a_2 durch $(n-1)a_1$ ungleich stärker ist, als sie sein würde, wenn a_2 nur $n-1$ einzelne Vorstellungen von der Intensität a_1 gegenüberständen; denn es ist allgemein

$$\frac{ma_2 a_2}{(n-1)a_1 + a_2} > \frac{ma_1 a_2}{a_1 + a_2}.$$

Dagegen ist die Hemmung der einzigen Vorstellung $(n-1)a_1$ ungleich schwächer als die Hemmungen der $n-1$ einzelnen Vorstellungen a_1 zusammengenommen, denn von diesen ist die Summe $= (n-1) \cdot \frac{ma_2 a_2}{(n-1)(a_1 + a_2)} = \frac{ma_2 a_2}{a_1 + a_2}$, indess die Hemmung von jener $= \frac{ma_2 a_2}{(n-1)a_1 + a_2}$, also viel kleiner ist. Hierdurch verallgemeinern sich die §. 47, 5. und §. 49, 5. für drei und vier Vorstellungen gemachten Bemerkungen.

III. Erläuterung der allgemeinen Formeln.

51.

Obgleich für die allgemeinen Formeln der mathematischen Psychologie eine directe Vergleichung mit der Erfahrung nicht möglich ist, so hat doch die Berechnung von Zahlenbei-

spielen ihren wesentlichen Nutzen; denn man erhält hierdurch erst eine deutliche Uebersicht der Mannichfaltigkeit der Werthe, welche die gesuchten Grössen annehmen können, wenn den gegebenen verschiedene Werthe beigelegt werden. Eigentlich bedürfte es dazu freilich ausgedehnter Tafeln, indess sind doch auch schon blosse Fragmente solcher Tafeln hinreichend, auf Eigenschaften der Formeln aufmerksam zu machen, die ohne sie leicht unbemerkt bleiben. Man könnte zwar daran denken, durch geometrische Construction der Formeln, durch krumme Linien und Flächen Zahlentafeln überflüssig zu machen;* aber da die Zahl der Veränderlichen sehr bald über drei hinaussteigt, so wird dann dieses Hülfsmittel unzulänglich. Wir geben zuerst folgende Tabelle für zwei im vollen Gegensatz stehende Vorstellungen a, b, deren Hemmungen x, y und Reste r, s nach §. 42. berechnet sind.

a	b	S	x	y	r	s
1	1	1	0,50	0,50	0,50	0,50
2	1	1	0,33	0,67	1,67	0,33
3	1	1	0,25	0,75	2,75	0,25
10	1	1	0,09	0,91	9,91	0,09
11	10	10	4,76	5,24	6,24	4,76

Dass bei ungleichen Intensitäten der stärkern Vorstellung auch ein grösserer Rest bleibt, weiss man aus dem zum Grunde liegenden Rechnungsprincip, dass die Hemmungen sich umgekehrt wie die Intensitäten verhalten; dass aber die Ungleichheit der Reste in so viel höherem Maasse zunimmt als die Ungleichheit der Intensitäten, wie es vorstehende Tafel nachweist, würde man ohne die Rechnung nicht vorauszusehen vermögen. Die Tabelle zeigt nämlich, dass, indess die Verhältnisse der Intensitäten 1 : 2, 1 : 3, 1 : 10 sind, die entsprechenden Reste der Vorstellungen in den Verhältnissen 1 : 5, 1 : 11, 1 : 109 stehen. In der That geben die allgemeinen Formeln

---

* So ist z. B. sehr leicht zu bemerken, dass, wenn in den Hemmungsausdrücken für zwei Vorstellungen b als constant, a aber als veränderlich angesehen wird, x als die Ordinate einer gleichseitigen Hyperbel sich darstellen lässt, deren zugehörige Abscisse $a+b$ ist, wenn beide Coordinaten auf den Asymptoten genommen werden.

$$\frac{r}{s} = \frac{a^2}{b^2}[1 + \frac{b}{a}(1 - \frac{b}{a})],$$

woraus, da $\frac{b}{a} < 1$, erhellt, dass der Quotient des Verhältnisses der Reste grösser ist als der Quotient des Verhältnisses der Quadrate der Intensitäten der Vorstellungen, und dass, je grösser a im Verhältniss zu b, um so mehr sich das Verhältniss der Reste dem der Quadrate der Intensitäten nähert.

Dieses Ergebniss ist von psychologischer Bedeutung; denn es zeigt, dass von zwei ungleichen voll entgegengesetzten Vorstellungen immer die stärkere sich vor der schwächeren in auffallend überwiegendem Maasse vordrängen und die Aufmerksamkeit vorzugsweise auf sich zu ziehen scheinen wird. Es versteht sich jedoch von selbst, dass dies nicht ohne weitere Untersuchung von einfachen Vorstellungen auf zusammengesetzte übergetragen werden darf.

52.

Für zwei nur im Grade m entgegengesetzte Vorstellungen finden sich zwar die Hemmungen sehr einfach aus denen für vollen Gegensatz, wenn man diese mit m multiplicirt, und es ergeben sich dann durch Subtraction von den Intensitäten auch sofort die Reste. Indess wird es doch bequemer sein, auch hier ein paar Tabellen zur Hand zu haben. Wir geben daher folgende zwei für $m = 0,3$ und $m = 0,7$.

1. $m = 0,3$

a	b	S	x	y	r	s
1	1	0,3	0,15	0,15	0,85	0,85
2	1	0,3	0,10	0,20	1,90	0,80
3	1	0,3	0,07	0,23	2,93	0,77
10	1	0,3	0,03	0,27	9,97	0,73
11	10	3,0	1,43	1,57	9,57	8,43

2. $m = 0,7$

a	b	S	x	y	r	s
1	1	0,7	0,35	0,35	0,65	0,65
2	1	0,7	0,23	0,47	1,77	0,53
3	1	0,7	0,17	0,53	2,83	0,47
10	1	0,7	0,06	0,64	9,94	0,36
11	10	0,7	3,32	3,68	7,68	6,32

Für $m = 0,3$ entsprechen den Intensitätsverhältnissen $1:2$, $1:3$, $1:10$ die Restverhältnisse $1:2,37$, $1:3,81$, $1:13,66$; für $m = 0,7$ denselben Intensitätsverhältnissen die Restverhältnisse $1:3,34$, $1:6,02$, $1:27,61$.

Für beide Werthe von m bleiben also die Restverhältnisse weit hinter dem Verhältniss der Quadrate der Intensitäten, das für vollen Gegensatz von den ersteren sogar überstiegen wird, zurück. In der That ist nach §. 43, 3. allgemein

$$\frac{r}{s} = \frac{aa+ab-mbb}{bb+ab-mab} = \frac{a^2}{b^2}\left[\frac{1+\frac{b}{a}(1-m\frac{b}{a})}{1+\frac{a}{b}(1-m)}\right].$$

Dieser Werth ist erst dann $\gtreqless \frac{a^2}{b^2}$, wenn

$$m \gtreqless \frac{1-\frac{b^2}{a^2}}{1-\frac{b^3}{a^3}};$$

eine Grenze, die immer kleiner als 1 ist, wenn $\frac{b}{a} < 1$. Für $b = 1$, $a = 10$ würde z. B. $m \gtreqless \frac{990}{999}$, also $\gtreqless 0,991$ sein müssen. Ist aber die Ungleichheit von a und b gering, so kann schon für weit kleinere Werthe von m das Restverhältniss das Verhältniss der Quadrate der Intensitäten erreichen und übersteigen. Ist z. B. $b = 10$, $a = 11$, so braucht nur $m \gtreqless \frac{231}{331}$ d. i. $0,698$ zu sein. In der That giebt die zweite Tabelle, in der $m = 0,7$, das Restverhältniss $632:768 = 1:1,215$, dessen Quotient grösser ist als der von $10^2 : 11^2 = 1:1,210$. Bei geringer Ungleichheit der Grundzahlen wird jedoch auch die ihrer Quadrate wenig in die Augen fallend sein, wie dies das Beispiel bestätigt.

Es lässt sich jedoch auch schreiben

$$r : s = a\left[1-\frac{mbb}{a(a+b)}\right] : b\left[1-\frac{ma}{a+b}\right];$$

welche Proportion für hinlänglich kleine Werthe von $\frac{b}{a}$ übergeht in $\qquad r:s = a:(1-m)b.$

Ist also der Gegensatz der Vorstellungen, m, sehr klein, dabei aber die Ungleichheit ihrer Intensitäten

sehr gross, so stehen ihre Reste nahe im einfachen Verhältniss ihrer Intensitäten.

53.

Wir lassen jetzt eine Tabelle für drei Vorstellungen folgen, von denen wir, um bei dem Einfachsten stehen zu bleiben, immer zwei als gleich angenommen haben. Bei denen für graduellen Gegensatz haben wir uns mit einer geringeren Anzahl von Werthen begnügt, da sich hier Hemmungen und Reste langsamer ändern.

1. $m = n = p = 1$

a	b	c	S	x	y	z	r	s	t
10	10	10	20	6,67	6,67	6,67	3,33	3,33	3,33
11	10	10	20	6,25	6,88	6,88	4,75	3,12	3,12
15	10	10	20	5,00	7,50	7,50	10,00	2,50	2,50
20	10	10	20	4,00	8,00	8,00	16,00	2,00	2,00
40	10	10	20	2,22	8,89	8,89	37,78	1,11	1,11
11	11	10	21	6,78	6,78	7,46	4,22	4,22	2,54
12	12	10	22	6,83	6,83	8,25	5,17	5,17	1,75
13	13	10	23	6,97	6,97	9,07	6,03	6,03	0,93
14	14	10	24	7,06	7,06	9,89	6,94	6,94	0,11

2. $m = n = p = 0,7$

a	b	c	S	x	y	z	r	s	t
10	10	10	14,0	4,67	4,67	4,67	5,33	5,33	5,33
15	10	10	14,0	3,50	5,25	5,25	11,50	4,75	4,75
40	10	10	14,0	1,55	6,22	6,22	38,45	3,78	3,78
11	11	10	14,7	4,75	4,75	5,22	6,25	6,25	4,78
14	14	10	16,8	4,94	4,94	6,92	9,06	9,06	3,08

3. $m = n = p = 0,5$

a	b	c	S	x	y	z	r	s	t
10	10	10	10,0	3,33	3,33	3,33	6,67	6,67	6,67
15	10	10	10,0	2,50	3,75	3,75	12,50	6,25	6,25
40	10	10	10,0	1,11	4,44	4,44	38,89	5,56	5,56
11	11	10	10,5	3,39	3,39	3,73	7,61	7,61	6,27
14	14	10	12,0	3,53	3,53	4,94	10,47	10,47	5,06

4. $m = n = p = 0,3$

a	b	c	S	x	y	z	r	s	t
10	10	10	6,0	2,00	2,00	2,00	8,00	8,00	8,00
15	10	10	6,0	1,50	2,25	2,25	13,50	7,75	7,75
40	10	10	6,0	0,67	2,67	2,67	39,33	7,33	7,33
11	11	10	6,3	2,03	2,03	2,24	8,97	8,97	7,76
14	14	10	7,2	2,12	2,12	2,97	11,88	11,88	7,03

In dieser Tabelle ist vor allem Andern auffällig, dass die schwächste der drei Vorstellungen einen weit kleineren Rest behält, wenn die beiden stärkeren nur um ein Geringes stärker, aber unter sich gleich sind, als wenn eine von ihnen sehr bedeutend stärker, die andere aber der schwächsten gleich ist. Für $m = 1$ ist z. B., wenn $a = b = 14$ und $c = 10$, $t = 0{,}011 \, . \, c$; dagegen für $a = 40$ und $b = c = 10$, $s = t = 0{,}111 \, . \, c$. Diese Bemerkung gilt allgemein. Denn setzen wir in der Formel für z (§. 45, 2.) $a = b$, so erhalten wir

$$z = \frac{ma(a+c)}{a+2c}.$$

Setzen wir aber $b = c$, so kommt

$$z = \frac{2mac}{2a+c};$$

woraus sich, da $a > c$, leicht ergiebt, dass der erstere Werth allgemein der grössere ist.

Für den letzteren Fall, wo $b = c$, sind noch die Verhältnisse der Reste zu beachten. Es ist dann nämlich

$$r : (s = t) = a[1 - \frac{2mc}{a(2a+c)}] : c[1 - \frac{2ma}{2a+c}],$$

welche Proportion für hinlänglich kleine Werthe von $\frac{c}{a}$ übergeht in

$$r : (s = t) = a : c(1 - m);$$

wie für zwei Vorstellungen in §. 52. Ist $m = 1$, so ergiebt die erste dieser Proportionen

$$r : (s = t) = 2a^2(1 + \frac{c}{2a} - \frac{c^2}{a^2}) : c^2,$$

wodurch eine stärkere Ungleichheit der Reste angezeigt ist, als für zwei Vorstellungen in §. 51. gefunden wurde.

54.

Noch nothwendiger werden Zahlentafeln, um sich über die Mannichfaltigkeit der Ergebnisse zu orientiren, wenn die Gegensätze ungleich sind. Wir geben daher auch hierüber eine Tabelle, die wenigstens für den ersten Anfang genügen mag.

1. $a = b = c = 10$

m	n	p	S	x	y	z	r	s	t
1	1	0,2	12	3,27	5,45	3,27	6,73	4,55	6,73
1	0,5	0,5	10	3,75	3,75	2,50	6,25	6,25	7,50
1	0,8	0,3	11	3,40	4,71	2,88	6,60	5,29	7,12
1	0,9	0,7	16	5,23	5,85	4,92	4,77	4,15	5,08
0,8	0,6	0,4	10	3,33	3,89	2,78	6,67	6,11	7,22

2. $m = 1$; $n = 0,33$; $p = 0,67$

a	b	c	S	x	y	z	r	s	t
10	10	10	10,00	4,17	3,33	2,50	5,83	6,67	7,50
15	10	10	13,33	4,30	5,16	3,87	10,70	4,84	6,13
40	10	10	16,67	2,53	8,08	6,06	37,47	1,92	3,94
11	11	10	11,00	4,47	3,58	2,95	6,53	7,42	7,05
14	14	10	14,00	5,30	4,24	4,45	8,70	9,76	5,55

3. $m = 0,33$; $n = 1$; $p = 0,67$

a	b	c	S	x	y	z	r	s	t
10	10	10	10,00	2,50	3,33	4,16	7,50	6,67	5,83
15	10	10	10,00	1,82	3,64	4,55	13,18	6,36	5,45
40	10	10	10,00	0,77	4,11	5,13	39,23	5,89	4,87
11	11	10	10,33	2,48	3,31	4,55	8,52	7,69	5,45
14	14	10	11,33	2,43	3,24	5,66	11,57	10,76	4,34

4. $m = 0,33$; $n = 0,67$; $p = 1$

a	b	c	S	x	y	z	r	s	t
10	10	10	10,00	3,33	2,50	4,17	6,67	7,50	5,83
15	10	10	13,33	3,33	3,75	6,25	11,67	6,25	3,75
40	10	10	13,33	1,48	4,44	7,41	38,52	5,56	2,59
11	11	10	10,33	3,31	2,48	4,55	7,69	8,52	5,45
14	14	10	11,33	3,24	2,43	5,67	10,76	11,57	4,33

In der ersten der vier Abtheilungen dieser Tabelle zeigen sich durchgängig die Hemmungen von b, also von der Vorstellung am grössten, welche (da $m > n > p$) die grössten Gegensätze zu den andern hat. Dies entspricht vollkommen dem allgemeinen Rechnungsprincip, auf dem die Formeln des §. 47., die hier zum Grunde liegen, beruhen: dass sich nämlich hier die Hemmungen der einzelnen Vorstellungen zu einander wie die Summen der Gegensätze einer jeden der letzteren zu den übrigen Vorstellungen verhalten. Die absolute Grösse der Hemmung von b hängt aber zugleich von der Grösse der HS. $= (n + p)a$ ab und ist in der Tabelle am grössten für $S = 16$.

Um nun allgemeiner zu untersuchen, welche Relationen der Gegensätze die Hemmung von b möglichst gross machen, gebe man dem Ausdruck von y in §. 47, 2. die Form

$$y = \frac{a}{\frac{\alpha}{\beta\gamma} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\beta}};$$

so erhellt, dass, α als constant angenommen, y um so grösser sein wird, je grösser β und γ sind. Nun war $\alpha = m + p$, $\beta = m + n$, $\gamma = n + p$. Nimmt man daher mit α zugleich m und p constant an, so werden β und γ um so grösser, je grösser n ist. Es kann aber n nicht den Werth von m übersteigen. Daher wird y am grössten für $n = m$, wo dann

$$y = \frac{m(m+p)a}{2m+p},$$

welcher Werth grösser als der allgemeine Werth

$$y = \frac{(m+n)(n+p)a}{2(m+n+p)}$$

ist, so lange $m > n$. In der That wird, wenn wir $m = n = 1$, und $p = 0{,}7$ setzen, für $a = 10$, $y = 6{,}30$, also grösser als der in der Tabelle für $m = 1$, $n = 0{,}9$, $p = 0{,}7$ angegebene Werth $y = 5{,}85$.

Von den drei folgenden Abtheilungen der Tabelle, in welchen im Allgemeinen sowohl Intensitäten als Gegensätze ungleich sind, giebt Nr. 2. die Hemmungen und Reste an, die stattfinden, wenn der stärkste Gegensatz zwischen den beiden stärksten, der schwächste Gegensatz zwischen den beiden schwächsten Vorstellungen liegt. In No. 3. dagegen liegt der stärkste Gegensatz zwischen den beiden schwächsten und der schwächste Gegensatz zwischen den beiden stärksten Vorstellungen; in No. 4. der stärkste Gegensatz zwischen der stärksten und schwächsten, der schwächste Gegensatz wieder zwischen den beiden stärksten Vorstellungen. Hiernach fallen nun bei denselben Intensitäten die Hemmungen sehr verschieden aus. So erleidet die stärkste Vorstellung in dem ersten dieser drei Fälle die grösste, im zweiten die kleinste Hemmung, ja sie wird im ersten, wenn sie nicht bedeutend stärker ist als die mittlere der drei Vorstellungen, sogar mehr gehemmt als die schwächste, die überhaupt hier im Allgemeinen am wenigsten

leidet. Ihre grössten Hemmungen gehören dem dritten Falle, in welchem wieder durchschnittlich die mittlere Vorstellung die geringste Last zu tragen hat, indess sie im ersten meistens stärker gehemmt wird als in den beiden andern, u. s. f.

Wir brechen diese vergleichenden Betrachtungen hier ab, weil der folgende Abschnitt dazu bestimmt ist, das wichtigste Ergebniss der möglichen Ungleichheit der Hemmungen ausführlich zu erörtern.

Dritter Abschnitt.

Von den Bedingungen des Verschwindens einfacher Vorstellungen aus dem Bewusstsein.

55.

Die vorhergehenden §§. haben gezeigt, dass die Klarheitsreste ungleich starker Vorstellungen, namentlich bei vollem Gegensatz, in weit stärkerem Maasse ungleich sind als ihre Intensitäten. Hieran knüpft sich die für die Psychologie höchst wichtige Frage, ob es nicht für zwei oder mehrere Vorstellungen eine Ungleichheit der Intensitäten giebt, bei welcher eine der Vorstellungen durch die übrigen gänzlich gehemmt und somit völlig aus dem Bewusstsein verdrängt wird. Für zwei Vorstellungen erhält man die Antwort darauf sehr leicht. Dass nämlich dann diese Frage nur für die schwächere von beiden Vorstellungen aufgeworfen werden kann, leuchtet von selbst ein. Es müsste dann also ihr Rest $s = 0$ werden können. Dies giebt für vollen Gegensatz (§. 42, 3.)

$$s = \frac{bb}{a+b} = 0,$$

was nur möglich ist, wenn entweder $b = 0$ oder $a = \infty$ wird. Für endliche Werthe von a und b muss also die obige Frage verneint werden. Für schwächern Gegensatz als vollen lässt

sich zum Voraus dasselbe Resultat erwarten. In der That folgt dann (§. 43, 3.)

$$s = \frac{bb + (1-m)ab}{a+b} = 0.$$

Es müsste also entweder $a = \infty$ oder $b = 0$ oder $b = -(1-m)a$, also negativ werden, was unmöglich ist. Wir können daher den Satz aufstellen: wie viel Mal auch die stärkere von zwei Vorstellungen die schwächere an Intensität übertreffen möge, so vermag sie doch diese letztere nicht ganz zu hemmen, aus dem Bewusstsein zu verdrängen und damit aller ihrer Klarheit zu berauben.

Zu wesentlich andern Resultaten gelangen wir dagegen, wenn wir die Frage für drei gleichzeitig gegebene Vorstellungen aufwerfen. Wir wollen sie zuerst unter der beschränkenden Voraussetzung gleichen Gegensatzes untersuchen.

I. Bedingungen des Verschwindens einer von drei gleich entgegengesetzten Vorstellungen.

56.

Der gleiche Gegensatz zwischen drei Vorstellungen $a \geqq b > c$ sei zunächst nur voller, so mag zuerst untersucht werden, ob die schwächste Vorstellung c durch die beiden stärkeren gänzlich aus dem Bewusstsein verdrängt werden kann. Setzen wir zu dem Ende ihren Rest (§. 44, 3.)

$$t = \frac{cc(a+b) - abb}{ab + ac + bc} = 0,$$

so ersieht man unmittelbar, da für endliche Werthe von a, b, c der Nenner dieses Ausdrucks niemals unendlich wird, dass nur der Zähler, gleich Null gesetzt, der Bedingung $t = 0$ genügen kann. Löst man nun die Gleichung

$$c^2(a+b) - ab^2 = 0$$

für c auf, so ergiebt sich

$$c = b\sqrt{\frac{a}{a+b}}; \qquad (1)$$

wo das Minuszeichen, da keine Intensität negativ sein kann, weggelassen ist. Dieser Werth stimmt zugleich mit der Voraussetzung $a \geqq b > c$ zusammen und geht für $a = b$ über in

$$c = \tfrac{1}{2}a\sqrt{2}$$

Hieraus erhellt, dass, wenn von drei voll entgegengesetzten Vorstellungen die beiden stärksten ungleiche oder gleiche Intensität haben, sich für die Intensität der schwächsten immer ein reeller Werth finden lässt, bei welchem die Vorstellung im Zustand des Gleichgewichts mit den andern gänzlich gehemmt werden muss und also aus dem Bewusstsein verschwindet

Die folgende Tabelle enthält eine Reihe solcher Werthe.

b	a	$c = b\sqrt{\frac{a}{a+b}}$	b	a	$c = b\sqrt{\frac{a}{a+b}}$
10	10	7,07	10	35	8,82
	11	7,24		40	8,94
	12	7,39		45	9,05
	13	7,52		50	9,13
	14	7,64		60	9,26
	15	7,74		70	9,35
	20	8,16		80	9,43
	25	8,45		90	9,49
	30	8,66		100	9,53

Man erkennt hieraus wie aus dem allgemeinen Ausdruck für c, dass dieses, b als constant angenommen, sich diesem constanten Werthe um so mehr nähert, je grösser a wird. Auch stellt, wenn man sich a und c als Abscisse und Ordinate einer Curve denkt, die Gleichung für c eine bekannte Linie dritter Ordnung dar, die in der Entfernung b von der Abscissenaxe eine dieser parallele Asymptote hat.

Löst man die Gleichung (1) für a auf, so kommt

$$a = \frac{bc^2}{b^2 - c^2}. \qquad (2)$$

Da $b > c$, so ist dieser Werth immer positiv, also möglich. Er muss jedoch auch $\geqq b$ und $> c$ sein. Die erste dieser Bedingungen fordert $c \geqq \frac{1}{2}b\sqrt{2}$, die zweite $c > \frac{1}{2}b(\sqrt{5}-1)$. Mit der ersteren wird auch die zweite erfüllt. Wird also zu zwei Vorstellungen b, c eine dritte, a, gesucht, die stärker als beide sein und in Verbindung mit der stärkern von beiden die schwächere gänzlich aus dem Bewusstsein verdrängen soll, so ist ihre Intensität durch die Gleichung (2) bestimmt, sofern zugleich $c \geqq \frac{1}{2}b\sqrt{2}$ ist. Ausserdem würde $a < b$. Es erhellt schon

hieraus, dass b nicht $=c$ sein, also kein auch noch so starkes a zwei schwächere unter einander gleiche Vorstellungen gänzlich zu hemmen vermag. Dies bestätigt auch die Formel (2), die für $b=c$, $a=\infty$ giebt. Noch weniger giebt es ein a, das b und c, wenn sie ungleich sind, gänzlich zu hemmen vermöchte. Denn setzt man den Rest von b, $s=0$, so ergiebt sich (§. 44, 3.) $b=c\sqrt{\frac{a}{a+c}}$. Es würde also, wenn b aus dem Bewusstsein verschwinden sollte, $b<c$ sein müssen, gegen die Voraussetzung. Auch ergäbe diese Gleichung für a aufgelöst $a=\frac{-b^2c}{b^2-c^2}$, also, wenn $b>c$, für a einen negativen, d. h. unmöglichen Werth. Daher können wir folgenden den obigen ersten ergänzenden zweiten Satz aufstellen: **Für die stärkste von drei voll entgegengesetzten Vorstellungen giebt es keine endliche Intensität, welche gross genug wäre, um im Gleichgewicht die beiden schwächeren Vorstellungen zugleich gänzlich aus dem Bewusstsein zu verdrängen.**

57.

Substituirt man den Werth $c=b\sqrt{\frac{a}{a+b}}$ in die Ausdrücke für die Reste r, s der beiden übrigen Vorstellungen a, b (§. 44, 3.), so erhält man nach gehöriger Reduction

$$r=\frac{aa+ab-bb}{a+b};\quad s=\frac{bb}{a+b}.$$

Dies sind genau die Werthe, welche in §. 42, 3. für die Reste von zwei voll entgegengesetzten Vorstellungen a, b gefunden worden sind. Hieraus ergiebt sich folgender merkwürdige Satz: **Wenn von drei einander voll entgegengesetzten Vorstellungen die schwächste durch die beiden stärkeren gänzlich gehemmt, also völlig aus dem Bewusstsein verdrängt wird, so sind die Hemmungen und Reste der beiden stärkeren im Zustande des Gleichgewichts genau so gross, wie sie sein würden, wenn jene dritte Vorstellung gar nicht vorhanden wäre.**

Es würde unrichtig sein, wenn man dieses Ergebniss so auslegen wollte, als ob unter den angegebenen Umständen die

verschwindende Vorstellung c ohne Einfluss auf die im Bewusstsein bleibenden a und b wäre. Denn c ist weder vernichtet noch aus einer andern Ursache als durch das Streben von a und b gewichen. Es hat an dem durch die HS. $b+c$ ausgedrückten Hemmungsstreben Antheil und wird durch einen Theil desselben, welcher $= c$, gehemmt, so dass dann von der HS. nur noch der Theil b auf die Vorstellungen a und b kommt. Es liegt aber in dem obigen Satze die Folge: dass die verschwundene Vorstellung c nicht den geringsten wahrnehmbaren Einfluss auf die zurückbleibenden Vorstellungen äussert. Dieses Ergebniss ist von grosser Wichtigkeit; denn es enthält wenigstens den ersten Anfang zur wissenschaftlichen Erklärung der psychologischen Thatsache, dass die unzählbar vielen aus dem Bewusstsein verschwundenen Vorstellungen in Bezug auf die zurückbleibenden so gut wie gar nicht vorhanden sind, sie auf keine Weise beengen, sondern nach solchen Verhältnissen auf sie wirken und von ihnen leiden, dass es den Anschein hat, als ob sie ganz wirkungslos wären und die zurückbleibenden nur auf einander wirkten. Es ist hiermit der Schlüssel zur Erklärung des gänzlichen Vergessens einer Vorstellung gefunden.

58.

Der Werth $c = b\sqrt{\frac{a}{a+b}}$ ist nach dem Vorstehenden ein Grenzwerth, den c nicht übersteigen darf, wenn es neben a und b aus dem Bewusstsein verschwinden soll. Es fragt sich nun aber weiter, was geschehen wird, wenn $c < b\sqrt{\frac{a}{a+b}}$ ist. Dass c nicht mehr als ganz gehemmt werden, dass es nicht einen negativen Rest haben kann, liegt in der Natur der Sache. Aber es muss doch die Annahme eines geringeren Werthes von c, als zur gänzlichen Hemmung desselben nothwendig ist, einen Erfolg haben, der sich von dem, bei welchem c diesem Werthe gleich kommt, unterscheidet. Die Folge wird zeigen,* dass dann die Zeit, in welcher c aus dem

* S. §. 107.

ungehemmten in den völlig gehemmten Zustand übergeht, ohne Vergleich **kürzer** ist. Aber es ist schon jetzt leicht zu übersehen, dass mit der gänzlichen Hemmung von c das Gleichgewicht zwischen den drei Vorstellungen noch nicht hergestellt sein wird. Dieses nämlich fordert (§. 44, 2.), dass die Hemmung von c

$$z = \frac{ab(b+c)}{ab+ac+bc}$$

sei, welcher Werth aber $> c$, wenn $c < b\sqrt{\frac{a}{a+b}}$, also auch durch die gänzliche Hemmung von c nicht realisirt werden kann. In der That wird in dem Zeitpunkt, wo c völlig gehemmt ist, von den drei Vorstellungen a, b, c zusammengenommen noch nicht so viel gehemmt sein, als die HS. $b+c$ erfordert. Obgleich nämlich die Summe aller Hemmungen erst allmälig der geforderten HS. gleich wird, so stehen doch bei gleichzeitig durch äussere Wahrnehmungen gegebenen Vorstellungen ihre Hemmungen, wie klein sie auch Anfangs sein mögen, sogleich in denjenigen HV., die sie auch im Gleichgewicht haben müssen, denn diese gründen sich nur auf ihre relativen Wirkungen und ihre relative Nachgiebigkeit gegen dieselben. Da nun hier die HV. nur den Intensitäten umgekehrt proportional sind, so wird, wenn die Hemmung von c gleich c, die von $a \ldots \frac{cc}{a}$, die von $b \ldots \frac{cc}{b}$ sein; so dass die Summe des Gehemmten dann $= \frac{c(ab+ac+bc)}{ab}$ sein wird, eine Grösse, die, wie sich leicht findet, $< b+c$, die HS., wenn $c < b\sqrt{\frac{a}{a+b}}$ ist. Es bleibt dann also der Rest der HS. $b+c-\frac{c(ab+ac+bc)}{ab}$ $= \frac{abb-(a+b)cc}{ab}$ übrig, der noch gehemmt werden muss. Er kann sich aber, da c bereits völlig gehemmt ist, nur auf a und b vertheilen, was nothwendig im umgekehrten Verhältniss der Intensitäten dieser Vorstellungen geschehen wird. Hieraus ergiebt sich als

Antheil von a am Reste der HS.... $\frac{abb-(a+b)cc}{a(a+b)}$, und als

" " b " " " " ... $\frac{abb-(a+b)cc}{b(a+b)}$.

Addirt man nun diese Antheile bezüglich zu dem, was von a und b zuvor gehemmt worden ist und $\frac{cc}{a}$, $\frac{cc}{b}$ betrug, und nennt diese Summen der Hemmungen von a und b.... x' und y', so ergiebt sich

$$x' = \frac{cc}{a} + \frac{abb-(a+b)cc}{a(a+b)} = \frac{bb}{a+b};$$

$$y' = \frac{cc}{b} + \frac{abb-(a+b)cc}{b(a+b)} = \frac{ab}{a+b};$$

also genau dieselben Werthe, die sich für die Hemmungen von a und b im Gleichgewicht ergeben würden, wenn eine dritte Vorstellung nicht vorhanden wäre. Der Satz des vorigen §'s findet also auch noch seine Anwendung, wenn $c < b\sqrt{\frac{a}{a+b}}$.

59.

Allgemein soll von jetzt an ein solcher Werth, der die Grösse bezeichnet, welche die Intensität einer Vorstellung haben muss, wenn sie, andern gleichzeitig gegebenen Vorstellungen gegenüber, gänzlich aus dem Bewusstsein verschwinden soll, ihr statischer Grenzwerth heissen und durch die der Intensität der Vorstellung, welche sie hat, vorgesetzte Sylbe *list. (limes staticus)* bezeichnet werden. Hiernach ist also für drei voll entgegengesetzte Vorstellungen, von denen $a > b > c$,

$$\text{list. } c = b\sqrt{\frac{a}{a+b}}.$$

Hiermit steht nun auch noch eine weitere Vermehrung der mathematisch-psychologischen Terminologie in Verbindung. Da die Veränderungen in der Hemmung schon als Sinken und Steigen der Vorstellungen bezeichnet worden sind, so ist durch diese Metapher schon ein Oben und Unten der Vorstellungen angedeutet, und zwar so, dass die gänzliche Hemmung einer Vorstellung dem Sinken derselben auf eine unterste Grenze entspricht, über welche hinaus eine weitere Bewegung nicht möglich ist, indess andrerseits die allmälige Befreiung einer Vorstellung von der Hemmung durch ein Wiederaufsteigen versinnlicht wird, das seine obere Grenze mit der völligen Befreiung von aller Hemmung erreicht. Demgemäss können wir

jede Vorstellung durch eine Gerade repräsentiren, deren Länge der Intensität der Vorstellung proportional anzunehmen ist, und die auf einer Geraden von unbestimmter Länge senkrecht stehen mag. Schneidet man nun auf dieser die Intensität der Vorstellung versinnlichenden Geraden von ihrem obern Endpunkt aus ein Stück ab, welches der Hemmung proportional ist, die ihr im Gleichgewicht mit den andern gegebenen Vorstellungen zukommt, so kann der dadurch auf der Linie bestimmte Punkt der statische Punkt der Vorstellung heissen. Fällt dieser Punkt mit dem untern Endpunkt oder Fusspunkt der Geraden zusammen, so werden wir sagen, dass dann der statische Punkt auf der Grenze des Bewusstseins* liege. Dies wird also, nach dem Vorigen, immer stattfinden, wenn die Intensität eine Grösse hat, die in Bezug auf die übrigen Vorstellungen den statischen Grenzwerth ausdrückt. Ist die Intensität grösser als dieser Werth, so liegt der statische Punkt über der Grenze des Bewusstseins; ist sie kleiner, so fällt er auf die Verlängerung der Geraden, welche die Vorstellung repräsentirt, nach unten, und somit unter die Grenze des Bewusstseins. Er ist dann zwar unerreichbar, aber seine Lage steht doch noch, wie wir später sehen werden, mit der Bewegung der Vorstellung in genauem Zusammenhang.**

---

* Man könnte sie auch vielleicht nicht unpassend den Horizont (des Bewusstseins) nennen. Wir machen jedoch von dieser Benennung keinen Gebrauch, um nicht zu Analogieen, die sich nicht vollständig durchführen lassen, Veranlassung zu geben.

** Was wir hier die Grenze des Bewusstseins nennen, heisst bei Herbart «die Schwelle des Bewusstseins». Diese Metapher scheint indess nicht gut gewählt; denn sie will sich mit dem Sinken und Steigen der Vorstellungen nicht recht vertragen. Wenn man dann sagt, eine Vorstellung «sinke unter die Schwelle», oder gar sie «liege unter der Schwelle», womit Herbart meint, dass ihre Intensität kleiner sei als der statische Grenzwerth, den er den «Schwellenwerth» nennt, so haben diese Ausdrücke etwas Unnatürliches, das leicht gar ins Lächerliche gezogen werden kann. Sollte einmal die Grenze des Bewusstseins die Schwelle heissen, so musste nicht ein Oberhalb und Unterhalb, sondern ein Diesseits und Jenseits derselben, nicht ein Sinken und Steigen über oder unter die

60.

Sei jetzt der statische Grenzwerth für die schwächste von drei in beliebigem, aber gleichem Grade m entgegengesetzten Vorstellungen a, b, c zu bestimmen.

Ist auch hier wieder c die schwächste Vorstellung, so haben wir ihren in §. 45, 3. bestimmten Rest $t = 0$ zu setzen. Dies giebt

$$(a + b) c^2 + (1 - m) abc - mab^2 = 0,$$

woraus folgt

$$\text{list.}\, c = \frac{-(1-m)ab + b\sqrt{(1+m)^2 a^2 + 4mab}}{2(a+b)}; \qquad (1)$$

wo das Minus vor der Wurzelgrösse weggelassen ist, da c nicht negativ werden kann. Dieser Werth ist immer möglich. Denn erstens kann die Wurzelgrösse weder imaginär noch kleiner als das rationale Glied des Zählers, also auch list. c weder imaginär noch negativ werden. Sodann aber entspricht dieser Werth auch den Bedingungen $c < a$, $c < b$. Denn setzt man in der obigen Gleichung, aus deren Auflösung (1) entstand, $c < a$, so ergiebt sich

$$a(a + 2b) > mb(a + b),$$

was, wenn $a \geqq b$, offenbar immer richtig ist. Ebenso giebt $c < b$

$$2(1 - m)a + b > 0,$$

welche Bedingung ebenfalls jederzeit erfüllt wird.

Wenn also $a \geqq b$, so lässt sich für jeden Werth von m immer ein statischer Grenzwerth der dritten Vorstellung c finden.

Für $a = b$ geht die Gleichung (1) über in

$$\text{list.}\, c = \frac{a}{4}\left[-(1-m) + \sqrt{(1+m)^2 + 4m}\right].$$

Für $\frac{a}{b} = \infty$, also ein unendlich werdendes a, wird

$$\text{list.}\, c = mb.$$

Löst man die erste Gleichung dieses §'s für a auf, so ergiebt sich

$$a = \frac{bc^2}{(mb - c)(b + c)}. \qquad (2)$$

Schwelle, sondern ein Ueberschreiten derselben beim Austreten oder Wiedereintreten der Vorstellungen ins Bewusstsein unterschieden werden.

Hier muss, wenn a positiv sein soll, $mb > c$ sein, so dass $b > c$ allein nicht mehr ausreicht. Damit ferner $a \geqq b$ sei, muss sein

$$mb \leqq \frac{c(b+2c)}{b+c};$$

und, weil $a > c$

$$mb < \frac{c(2b+c)}{b+c};$$

welche letztere Bedingung jedoch durch Erfüllung der erstern überflüssig wird. Wenn also b und c gegeben sind, von denen $b > c$, so lässt sich nur dann ein Werth von $a \geqq b$ finden, bei dem c gänzlich gehemmt wird, wenn der Gegensatz m zwischen den Grenzen $\frac{c}{b}$ und $\frac{c}{b}(\frac{b+2c}{b+c})$ liegt. Hieraus folgt sogleich, dass es keinen Werth von a giebt, der, wenn $b = c$, beide Vorstellungen ganz zu hemmen vermag, wie schwach diese auch sein mögen. Noch weniger wird dies möglich sein, wenn $b > c$. Dies folgt auch direct so. Wenn c ganz gehemmt ist, so wird, wie §. 58. gezeigt wurde, die Hemmung von $a \ldots \frac{c^2}{a}$, die von $b \ldots \frac{c^2}{b}$, also der Rest von $a \ldots a - \frac{c^2}{a}$, der von $b \ldots b - \frac{c^2}{b}$ sein. Keiner dieser Reste kann aber Null werden.

61.

Da für zwei im Grade m entgegengesetzte Vorstellungen, a, b, die Hemmungen bezüglich $\frac{mbb}{a+b}$, $\frac{mab}{a+b}$ sind (§. 43, 2.), wie aber so eben bemerkt wurde, für drei im Grade m entgegengesetzte, a, b, c, von denen c aus dem Bewusstsein verschwindet, im Momente, wo dies geschieht und nun die Vorstellungen sich im Gleichgewicht befinden, die Hemmung von $a \ldots \frac{c^2}{a}$, die von $b \ldots \frac{c^2}{b}$ ist, so kann durch Vergleichung dieser Hemmungen leicht entschieden werden, ob auch für den beliebigen Gegensatz m die im Bewusstsein bleibenden Vorstellungen so gehemmt werden, als ob die dritte nicht vorhanden wäre, wie dies für vollen Gegensatz gilt (§. 57.). Es fragt sich also, ob für den statischen Grenzwerth von c (§. 60, (1))

$$\frac{c^2}{a} \gtreqless \frac{mbb}{a+b}; \quad \frac{c^2}{b} \gtreqless \frac{mab}{a+b}.$$

Da sich nun aus der Gleichung zu Anfange des vorigen §'s, welche den statischen Grenzwerth von c in (1) bestimmt, ergiebt

$$\frac{c^2}{a} = \frac{mbb-(1-m)bc}{a+b} \text{ und } \frac{c^2}{b} = \frac{mab-(1-m)ac}{a+b},$$

so leuchtet sofort ein, dass diese Werthe von $\frac{c^2}{a}$, $\frac{c^2}{b}$ beide kleiner sind als beziehungsweise $\frac{mbb}{a+b}$, $\frac{mab}{a+b}$. Wenn also von drei im Grade m entgegengesetzten Vorstellungen a, b, c die schwächste, c, im Gleichgewicht aus dem Bewusstsein verschwindet, so werden die beiden stärkeren a, b weniger gehemmt, als geschehen würde, wenn die dritte gar nicht vorhanden wäre.

Dieses Resultat kann paradox erscheinen. Denn man sollte meinen, dass durch den Zutritt einer neuen entgegengesetzten Vorstellung c die Hemmungen der ältern a, b unter allen Umständen sich vergrössern müssten. Bedenkt man jedoch, dass mit der durch die dritte bewirkten Vergrösserung der Hemmungssumme zugleich eine andre Vertheilung derselben eintritt, bei welcher auf die älteren Vorstellungen gar wohl weniger kommen kann, als sie bei der kleineren HS. zu tragen hatten, so fällt das Befremdliche hinweg.

Hieran knüpft sich sogleich noch die Frage, wie gross c sein muss, wenn a und b im Gleichgewicht genau so viel gehemmt werden sollen, wie dies geschehen würde, wenn c nicht vorhanden wäre. Da in diesem letzteren Falle die Hemmungen von a, b bezüglich $\frac{mbb}{a+b}$, $\frac{mab}{a+b}$, wenn aber c hinzukommt, bezüglich $\frac{mbc(b+c)}{ab+ac+bc}$, $\frac{mac(b+c)}{ab+ac+bc}$ sind (§. 45, 2.), so giebt die Gleichsetzung der beiden Hemmungen von a sowohl als b die Bedingungsgleichung

$$\frac{c(b+c)}{ab+ac+bc} = \frac{b}{a+b}.$$

Aus dieser aber folgt $c = b\sqrt{\frac{a}{a+b}}$, der statische Grenzwerth von c für vollen Gegensatz der drei Vorstellungen. Wir erhalten also hieraus den Satz: Von drei im Gegensatz m

stehenden Vorstellungen a, b, c werden im Gleichgewicht die beiden stärksten a, b ebenso viel gehemmt, als geschehen würde, wenn die dritte c nicht vorhanden wäre, sofern die Intensität der letztern gleich dem statischen Grenzwerth ist, den sie bei vollem Gegensatz aller drei Vorstellungen haben würde. Eine Erweiterung des Satzes in §. 57.

Es findet sich leicht durch Vergleichung der Formel §. 56, (1) mit §. 60, (1), dass der statische Grenzwerth von c bei vollem Gegensatz der drei Vorstellungen grösser ist als bei blos graduellem. Daher wird in vorstehendem Falle c nicht aus dem Bewusstsein verschwinden, obgleich a und b nur so viel gehemmt werden, als geschehen würde, wenn c gar nicht vorhanden wäre. Es wird c auch nicht verschwinden, wenn es kleiner als $b\sqrt{\frac{a}{a+b}}$ ist, sofern es nicht auch gleich oder kleiner ist, als sein statischer Grenzwerth für den Gegensatz m bedingt (§. 60, (1)).

62.

Dass, wenn c kleiner ist als der in §. 60, (1) bestimmte statische Grenzwerth, die im Bewusstsein bleibenden Vorstellungen, a, b, weniger gehemmt werden, als geschehen würde, wenn die dritte nicht vorhanden wäre, folgt zwar schon *a fortiori* aus dem ersten der beiden Sätze des vorigen §'s; auch lässt sich wohl übersehen, dass die Hemmung dieser Vorstellungen noch kleiner sein wird als in dem Falle, wo c nur dem statischen Grenzwerth gleich ist; doch kann beides auch durch folgende directe Ableitung bestätigt werden. Ist c völlig gehemmt, so sind, wie in §. 58., die gleichzeitigen Hemmungen von a, b bezüglich $\frac{c^2}{a}$, $\frac{c^2}{b}$; daher die Summe des von allen drei Vorstellungen zusammengenommen Gehemmten $= \frac{c(ab+ac+bc)}{ab}$, welche Summe kleiner als die HS. $m(b+c)$ ist, wenn c unter dem statischen Grenzwerth liegt. Es bleibt also der

$$\text{Rest der HS.} = \frac{mab^2 - (1-m)abc - (a+b)c^2}{ab}.$$

Von diesem kommt aber auf a der Bruchtheil $\frac{b}{a+b}$, auf b der Bruchtheil $\frac{a}{a+b}$. Addirt man nun diese neue Hemmung zu den vorigen, so findet sich

für die gesammte Hemmung von a... $\frac{mbb-(1-m)bc}{a+b}$;

" " " " " b... $\frac{mab-(1-m)ac}{a+b}$.

Da hier aber c kleiner als der statische Grenzwerth ist, so sind diese Werthe zwar kleiner als die Hemmungen $\frac{mbb}{a+b}$, $\frac{mab}{a+b}$, welche a und b bezüglich haben würden, wenn c nicht vorhanden wäre, zugleich aber grösser als die Werthe, welche dieselben Ausdrücke annehmen, wenn c gleich dem statischen Grenzwerth ist. Für diesen sind also die Reste von a, b am grössten.

63.

Zur numerischen Erläuterung des Vorstehenden lassen wir auch hier eine kleine Tafel der statischen Grenzwerthe von c folgen, denen zugleich die Hemmungen x, y und Reste r, s der im Bewusstsein bleibenden Vorstellungen a, b beigefügt sind.

b	m	a	c	x	y	r	s
10	1	10	7,07	5	5	5	5
		15	7,74	4	6	11	4
		40	8,94	2	8	38	2
	0,7	10	5,21	2,72	2,72	7,28	7,28
		15	5,64	2,12	3,18	12,88	6,82
		40	6,38	1,02	4,06	38,98	5,94
	0,5	10	3,90	1,52	1,52	8,48	8,48
		15	4,18	1,16	1,75	13,84	8,25
		40	4,63	0,54	2,14	39,46	7,86
	0,3	10	2,5	0,625	0,625	9,375	9,375
		15	2,63	0,46	0,69	14,54	9,31
		40	2,84	0,20	0,81	39,80	9,19

Zur bequemern Vergleichung geben wir in einer zweiten Tabelle die Hemmungen und Reste, die *a* und *b* haben, wenn *c* nicht vorhanden ist.

b	*m*	*a*	*x*	*y*	*r*	*s*
10	1	10	5	5	5	5
		15	4	6	11	4
		40	2	8	38	2
	0,7	10	3,5	3,5	6,5	6,5
		15	2,8	4,2	12,2	5,8
		40	1,4	5,6	38,6	4,4
	0,5	10	2,5	2,5	7,5	7,5
		15	2	3	13	7
		40	1	4	39	6
	0,3	10	1,5	1,5	8,5	8,5
		15	1,2	1,8	13,8	8,2
		40	0,6	2,4	39,4	7,6

Man sieht hier in der ersten Tabelle, wie mit der Abnahme der Gegensätze der statische Grenzwerth von *c* abnimmt, dieses also immer kleiner werden muss, um neben *a* und *b* aus dem Bewusstsein zu verschwinden. Ebenso erläutert die Vergleichung der ersten Tabelle mit der zweiten den ersten Satz in §. 61., indem sich die Reste von *a* und *b* in der ersten grösser ausweisen als in der andern.

64.

Die Ergebnisse der vorstehenden §§. sind für die erklärende Psychologie von Wichtigkeit. Sie zeigen, dass zwei einander entgegengesetzte Vorstellungen einer dritten gegenüber, nachdem sich das Gleichgewicht zwischen allen dreien hergestellt, nicht nur dieselbe Klarheit wieder gewinnen können, die sie zuvor hatten, als sie ohne die dritte sich ins Gleichgewicht gesetzt hatten, sondern dass sich durch die dritte Vorstellung sogar ihre Klarheit vermehren kann, und zwar ohne dass jene aus dem Bewusstsein zu weichen braucht. Alsdann erscheinen die beiden ersteren durch die dritte gleichsam gehoben. Sie contrastiren mit jener und die Aufmerksamkeit ruht vorzugsweise auf ihnen. Die dritte schwächste Vor-

stellung wirkt hier nur wie ein Reiz, der nicht für seinen Inhalt die Aufmerksamkeit in Anspruch nimmt, sondern sie auf das gleichzeitig gegebene stärkere Andre (Entgegengesetzte) hinlenkt. Ist aber die dritte Vorstellung so schwach, dass sie aus dem Bewusstsein weichen muss, so hört der Contrast mit ihr auf. Gleichwohl können auch dann noch die beiden andern Vorstellungen in erhöhter Klarheit als zuvor neben einander bestehen. Sie erscheinen dann klarer, als es sich mit ihrem Gegensatze und ihren Intensitäten vertragen würde, wenn sie ohne die verborgene Fortwirkung der dritten Vorstellung einander allein gegenüberständen. Es entsteht der Schein, als ob von beiden weniger gehemmt wäre, als gehemmt sein sollte. Sie contrastiren mit einander. Hiernach können zwei Vorstellungen, die sich im Gleichgewicht befanden, durch eine dritte schwache Vorstellung eine vorübergehende Störung erleiden, nach Beseitigung dieser Störung durch Verdrängung der störenden Vorstellung aufs Neue in Gleichgewicht kommen, aber nun in schärferer Klarheit einander gegenüberstehen als zuvor. Sie haben durch die siegreiche Bekämpfung der dritten an Freiheit gewonnen, aber es ist auch zugleich zwischen ihnen eine Spannung entstanden, die jedoch keine weitere gegenseitige Hemmung zur Folge hat, da sie nur durch die Niederhaltung des gemeinsamen Gegners bewirkt ist. Die zwischenfallenden Bewegungen aller drei Vorstellungen werden später in Untersuchung gezogen werden.

II. Bedingungen des Verschwindens einer von drei ungleich entgegengesetzten Vorstellungen.

65.

Nachdem wir gesehen haben, dass bei gleichen Gegensätzen und durchaus oder zum Theil ungleichen Intensitäten die schwächste von drei Vorstellungen durch die beiden stärkeren dauernd aus dem Bewusstsein verdrängt werden kann, ist die nächste Frage die, ob etwa auch umgekehrt die blosse Ungleichheit der Gegensätze bei durchgängiger Gleichheit der Intensitäten von drei gegebenen Vorstellungen die eine der-

selben gänzlich verschwinden machen könne. Die Antwort ergiebt sich sehr kurz aus den Formeln des §. 47. Setzt man die dort berechneten Hemmungen der drei Vorstellungen bezüglich $= a, b, c$, und $a = b = c$, so ergeben sich als Bedingungen des Verschwindens derselben der Reihe nach die Gleichungen

$$(m + p)(2 - n - p) + 2n = 0;$$
$$(m + n)(2 - n - p) + 2p = 0;$$
$$(n + p)(2 - n - p) + 2m = 0;$$

welche, da m, n, p stets positiv und $\leqq 1$ sein müssen, niemals erfüllt werden können. Wie gross also auch die Ungleichheit der Gegensätze von drei gleichen Vorstellungen sein möge, so kann sie doch niemals bewirken, dass eine der letzteren von den beiden andern aus dem Bewusstsein verdrängt wird.

66.

Sei jetzt allgemein für drei Vorstellungen, $a > b > c$, für welche die Stellung der Gegensätze m, n, p durch das Schema

$$\begin{array}{ccccc} & & c & & \\ & p & & n & \\ a & & m & & b \end{array}$$

angezeigt wird, zu bestimmen, unter welchen Bedingungen die schwächste aus dem Bewusstsein verschwinden muss.

Setzen wir zu diesem Zwecke in §. 46, 3.... $t = 0$, so erhalten wir die Bedingungsgleichung

$$c^2 (\beta a + \alpha b) + abc\gamma (1 - \pi) - ab\gamma (\mu a + \nu b) = 0,$$

die sich ohne Schwierigkeit für c auflösen lässt. Da jedoch die beiden ersten Glieder positiv und das letzte negativ, so ersieht man auch ohne diese Auflösung, dass sie eine positive und eine negative reelle Wurzel hat, von denen uns nur die erstere angeht. Man übersieht sogleich, dass sie sich bedeutend vereinfacht, wenn $\pi = 1$ ist. Wir wollen daher bei der weiteren Untersuchung, um Weitläufigkeit zu vermeiden, uns auf die Betrachtung dieses besondern Falles beschränken.

Wird $\pi = 1$ gesetzt, so muss entweder $\nu = 0$ oder $\mu = 0$ sein. Ist $\nu = 0$, so ist (§. 38.) $\mu = m$ und $\pi = 1 = n$. Ist aber $\mu = 0$, so ist $\nu = m$ und $\pi = 1 = p$ zu setzen.

Im ersteren Falle wäre also die Hemmungssumme $= ma + c$, und diese müsste, ihrem Begriffe nach, kleiner sein als jede der beiden andern möglichen Summen des Entgegengesetzten $mb + pc$, $pa + b$. Aber offenbar ist von diesen drei Summen die mittlere am kleinsten, also die wahre Hemmungssumme. Ist also $\pi = 1$, so kann nicht $\nu = 0$ sein.

Im zweiten Falle, wo $\mu = 0$, wäre die HS. $= mb + c$, und diese müsste kleiner als jede der beiden übrigen Summen $ma + nc$ und $a + nb$ sein. Nun ist die zweite zwar kleiner als die dritte; ob sie aber kleiner oder grösser als die erste, lässt sich im Allgemeinen nicht entscheiden. Sie wird aber nicht kleiner als die erste, und daher diese wirklich die HS. sein, wenn

$$m(a-b) \geqq (1-n)c.$$

Für $\pi = 1 = p$ ergiebt sich nun aus der Gleichung zu Anfange des §'s

$$\text{list.}\, c = b\sqrt{\frac{m(1+n)a}{(m+n)a+(1+m)b}}; \qquad (1)$$

eine Erweiterung der Formel (1) in §. 56., in welche sie für $m = n = 1$ übergeht. Substituiren wir diesen Werth von c in der nächstvorhergehenden Bedingung der Gültigkeit der Annahme $\pi = 1$, so ergiebt sich

$$m(a-b)^2 \geqq \frac{(1-n)^2(1+n)ab^2}{(m+n)a+(1+m)b}.$$

Dieser Relation müssen also die Grössen a, b, m, n genügen, wenn die Formel (1) anwendbar sein soll. Es geschieht dies am einfachsten, wenn $n = 1$, wo dann

$$\text{list.}\, c = b\sqrt{\frac{2ma}{(1+m)(a+b)}}; \qquad (2)$$

für welche Formel also $p = n = 1$ ist. Beide statische Grenzwerthe von c sind kleiner als der von c für vollen Gegensatz (§. 56, (1)).

67.

Untersuchen wir jetzt auf ähnliche Weise wie in §. 61., ob, wenn c den statischen Grenzwerth (1) des vor. §'s hat, die Hemmungen von a und b grösser, kleiner oder denen gleich sind, welche sie haben würden, wenn c nicht vorhanden wäre. Da im letzteren Falle ihre Hemmungen (§. 43, 2.) bezüglich

$\frac{mbb}{a+b}$, $\frac{mab}{a+b}$ sein würden, ihre Hemmungen aber, wenn mit a und b zugleich c gegeben ist, sich aus §. 46, 1. ergeben, wenn daselbst $p = 1$ und $S = mb + c$ gesetzt wird, so ist also die Frage, ob

$$\frac{(1+m)(mb+c)c}{(1+n)ab+(m+n)ac+(1+m)bc} - \frac{mb}{a+b}$$

und

$$\frac{(m+n)(mb+c)c}{(1+n)ab+(m+n)ac+(1+m)bc} - \frac{mb}{a+b}$$

$\gtreqless 0$ werden, sofern c den Grenzwerth (1) des vorigen §'s hat. Diese beiden Ausdrücke geben aber, wenn sie $\gtreqless 0$ gesetzt werden, folgende Ungleichungen:

$$c^2 + \frac{m(1-n)abc}{(1+m)(a+b)} - \frac{m(1+n)ab^2}{(1+m)(a+b)} \gtreqless 0;$$

$$c^2 - \frac{m(1-n)b^2c}{(m+n)(a+b)} - \frac{m(1+n)ab^2}{(m+n)(a+b)} \gtreqless 0.$$

Substituirt man hierin nun den Grenzwerth von c aus der Formel (1) des vor. §'s, so gehen sie über in

$$(1-n)\{(1+n)a+\sqrt{m(1+n)[(m+n)a+(1+m)b]a}\} \gtreqless 0,$$

und

$$-(1-n)\{(1+n)a+\sqrt{m(1+n)[(m+n)a+(1+m)b]a}\} \gtreqless 0.$$

Da nun der erste dieser beiden links von der Null stehenden Ausdrücke nicht negativ, der zweite nicht positiv werden kann, so kann jener nur $\geqq 0$, dieser nur $\leqq 0$ sein. Beide sind aber $= 0$ nur, wenn $n = 1$. Hieraus ergiebt sich, dass, wenn von drei ungleichen Vorstellungen die stärkste mit der schwächsten in vollem Gegensatz steht, die Gegensätze der übrigen aber nur graduelle sind, und die Intensität der schwächsten dem statischen Grenzwerth gleich ist, die stärkste Vorstellung mehr, die mittlere weniger gehemmt wird, als geschehen würde, wenn die dritte nicht vorhanden wäre. Stehen aber auch die beiden schwächsten im vollen Gegensatz, so ist die Hemmung der beiden stärksten genau so gross, wie sie sein würde, wenn die dritte Vorstellung nicht vorhanden wäre.

68.

Bestimmen wir endlich noch die Grösse der Hemmungen, die a und b haben müssen, wenn die Intensität von c kleiner als der statische Grenzwerth (1) §. 66. ist.

Da die Gegensätze nach dem Schema

$$\begin{array}{ccccc} & & c & & \\ & 1 & & n & \\ a & & m & & b \end{array}$$

vertheilt sind, so wird, wenn wir ebenso wie in §. 62. verfahren, gleichzeitig mit der völligen Hemmung von c die Hemmung von $a = (\frac{1+m}{1+n})\frac{c^2}{a}$, die von $b = (\frac{m+n}{1+n})\frac{c^2}{b}$, die Summe der Hemmungen aller drei Vorstellungen also sein

$$= \frac{(1+n)abc + [(m+n)a + (1+m)b]c^2}{(1+n)ab},$$

welcher Werth kleiner als die HS. $= mb + c$ ist, wenn c unter dem statischen Grenzwerth liegt. Es bleibt daher dann noch ein positiver Rest der HS.

$$= \frac{(1+n)mab^2 - [(m+n)a + (1+m)b]c^2}{(1+n)ab},$$

der nun nach dem Verhältniss $\frac{b}{a+b} : \frac{a}{a+b}$ auf a und b zu vertheilen ist. Hierdurch ergiebt sich als weitere Hemmung von a

$$\frac{(1+n)mab^2 - [(m+n)a + (1+m)b]c^2}{(1+n)a(a+b)};$$

und als weitere Hemmung von b

$$\frac{(1+n)mab^2 - [(m+n)a + (1+m)b]c^2}{(1+n)b(a+b)}.$$

Addirt man hierzu bezüglich die früheren Hemmungen $(\frac{1+m}{1+n})\frac{c^2}{a}$, $(\frac{m+n}{1+n})\frac{c^2}{b}$, so erhält man

die gesammte Hemmung von $a = \frac{(1+n)mb^2 + (1-n)c^2}{(1+n)(a+b)}$;

die gesammte Hemmung von $b = \frac{(1+n)mab - (1-n)c^2}{(1+n)(a+b)}$.

Der erste dieser Werthe ist $\geqq \frac{mbb}{a+b}$, der andre $\leqq \frac{mab}{a+b}$, wenn $n \leqq 1$. Da nun dies die Hemmungswerthe sind, die auf a und b kommen, wenn c nicht vorhanden ist, so erhellt, dass, wenn von den drei Vorstellungen nur die stärkste a

zur schwächsten *c* im vollen Gegensatz steht, und die Intensität der letztern kleiner ist als der statische Grenzwerth, die stärkste *a* mehr, die mittlere *b* weniger gehemmt wird, als es geschehen würde, wenn *c* nicht vorhanden wäre; dass dagegen, wenn ausser der stärksten und schwächsten auch die beiden schwächsten im vollen Gegensatz stehen, *a* und *b* genau so viel gehemmt werden, wie geschehen würde, wenn *c* nicht vorhanden wäre. Im erstern Falle wird also durch den Zutritt von *c* die stärkere der beiden Vorstellungen, *a*, *b*, an Klarheit verlieren, die schwächere gewinnen.

Die beiden obigen Gesammthemmungen von *a* und *b* geben addirt *mb*, die HS., welche diesen Vorstellungen für sich und ohne *c* zukommt. Dies ist leicht begreiflich, da die HS. für alle drei $= mb + c$ ist. Es zeigt sich aber hieraus, dass *a* und *b* im Gleichgewicht mit *c* in Summe nicht mehr gehemmt werden, als wenn *c* nicht vorhanden wäre, dass aber ihre Hemmungen in andern Verhältnissen stehen.

69.

Nicht blos um die vorstehenden Ergebnisse zu erläutern, sondern auch um einen Vorblick auf die noch mannichfaltigeren Verhältnisse zu geben, die bei weniger einfachen Voraussetzungen als die, welche hier allgemein erörtert worden sind, statt haben, lassen wir jetzt noch zwei Tabellen für die statischen Grenzwerthe von *c* folgen, von denen die erste zwei, die zweite einen der drei Gegensätze in verschiedenen Stellungen zwischen den ungleichen Vorstellungen als voll annimmt.

I. Tabelle.

$m = 0,33;\quad n = 1;\quad p = 1$

b	a	c	x	y	r	s
10	10	5	1,67	1,67	8,33	8,33
	15	5,48	1,33	2,00	13,67	8,00
	40	6,32	0,67	2,67	39,33	7,33
	∞	7,07	0	3,33	∞	6,67
			$m = 0,67;\quad n = 1;\quad p = 1$			
	10	6,32	3,33	3,33	6,67	6,67
	15	6,93	2,67	4,00	12,33	6,00
	40	8,00	1,33	5,33	38,67	4,67
	∞	8,94	0	6,67	∞	3,33
			$m = 1;\quad n = 0,33;\quad p = 1$			
	10	5,13	3,95	2,63	4,87	7,37
	15	7,07	5,00	5,00	10,00	5,00
	40	8,53	2,73	7,28	37,27	2,72
	∞	10	0	10	∞	0
			$m = 1;\quad n = 0,67;\quad p = 1$			
	10	6,03	4,36	3,64	5,64	6,36
	15	7,45	4,44	5,55	10,56	4,45
	40	8,78	2,31	7,71	37,69	2,29
	∞	10	0	10	∞	0
			$m = 1;\quad n = 1;\quad p = 0,33$			
	10	5,13	2,63	3,94	7,37	6,06
	15	5,43	1,96	4,42	13,04	5,58
	40	5,89	0,87	5,20	39,13	4,80
	∞	6,24	0	5,84	∞	4,16
			$m = 1;\quad n = 1;\quad p = 0,67$			
	10	6,03	3,64	4,36	6,36	5,64
	15	6,48	2,80	5,04	12,20	4,96
	40	7,23	1,31	6,27	38,69	3,73
	∞	7,85	0	7,38	∞	2,62

II. Tabelle.

$m = 0{,}33;\quad n = 0{,}67;\quad p = 1$

b	a	c	x	y	r	s
10	10	3,83	1,17	0,88	8,83	9,12
	15	5,33	1,52	1,70	13,48	8,30
	40	6,45	0,83	2,49	39,17	7,51
	∞	7,45	0	3,33	∞	6,67
	$m = 0{,}67;\ n = 0{,}33;\ p = 1$					
	10	4,34	2,35	1,41	7,65	8,59
	15	6,12	3,12	2,81	11,88	7,19
	40	7,92	1,96	4,70	38,04	5,30
	∞	9,43	0	6,67	∞	3,33
	$m = 0{,}33;\ n = 1;\ p = 0{,}67$					
	10	3,83	0,88	1,17	9,12	8,83
	15	4,06	0,66	1,32	14,34	8,68
	40	4,42	0,29	1,56	39,71	8,44
	∞	4,70	0	1,77	∞	8,23
	$m = 0{,}67;\ n = 1;\ p = 0{,}33$					
	10	4,34	1,41	2,35	8,59	7,65
	15	4,55	1,03	2,59	13,97	7,41
	40	4,88	0,45	2,97	39,55	7,03
	∞	5,11	0	3,26	∞	6,74
	$m = 1;\ n = 0{,}33;\ p = 0{,}67$					
	10	4,34	3,14	2,51	6,86	7,49
	15	5,62	3,51	4,21	11,49	5,79
	40	6,67	1,85	5,93	38,15	4,07
	∞	7,50	0	7,50	∞	2,50
	$m = 1;\ n = 0{,}67;\ p = 0{,}33$					
	10	4,34	2,51	3,14	7,49	6,86
	15	5,08	2,29	4,30	12,71	5,70
	40	5,60	1,05	5,23	38,95	4,77
	∞	6,00	0	6,00	∞	4,00

Um diesen Zahlen einige Resultate abzugewinnen, fügen wir noch zur Vergleichung mit den Hemmungen, die a und b ohne das Vorhandensein von c haben, folgende Hülfstabelle bei, die sich zwischen die Werthe in der zweiten Tabelle des §. 63. einschiebt.

b	m	a	x	y	r	s
10	0,33	10	1,67	1,67	8,33	8,33
		15	1,33	2,00	13,67	8,00
		40	0,67	2,67	39,33	7,33
	0,67	10	3,33	3,33	6,67	6,67
		15	2,67	4,00	12,33	6,00
		40	1,33	5,33	38,67	4,67

Die Vergleichung bestätigt nun 1., dass, wenn $n = 1$ und $p = 1$, und c den statischen Grenzwerth hat, die Hemmungen von a und b eben so gross sind, wie wenn c nicht vorhanden ist; 2., dass, wenn $p = 1$, $m < 1$, $n < 1$ und $a > b$, a mehr, b weniger gehemmt wird, als es ohne c geschehen würde. 3. Sie zeigt ferner, dass dies auch noch gilt, wenn $m = 1$, $n < 1$, $p = 1$, sofern a hinlänglich grosse Werthe hat (in der Tabelle für $a \geqq 15$). 4. Dass die Hemmungen von a und von b kleiner sind, als sie ohne c sein würden, wenn $m < 1$, $n = 1$, $p < 1$, und $m = 1$, $n < 1$, $p < 1$. 5. Dass dasselbe gilt, wenn $m = 1$, $n < 1$, $p = 1$, und a einen hinlänglich kleinen Werth hat (in der Tabelle für $a = 10$). 6. Ein Fall, in dem die Hemmungen von a und b beide grösser wären als ohne c, kommt in der Tabelle nicht vor. 7. Ebenso wenig findet sich ein Fall, in dem die Hemmung von a kleiner, die von b grösser wäre, als sie ohne c sein würde. Diese und andere inductorische Bemerkungen, zu denen die Tabellen, zumal wenn man sie noch weiter ausdehnt, Gelegenheit geben, allgemein zu begründen und auf die Grenzen ihrer Gültigkeit zurückzuführen, würde sich jedoch nur für eine monographische Behandlung des Gegenstandes eignen.

III. Bedingungen des Verschwindens einer von mehr als drei entgegengesetzten Vorstellungen.

70.

Die Rechnungsthatsache der statischen Grenzwerthe ist nicht auf drei Vorstellungen beschränkt, sondern sie wiederholt sich bei jeder beliebigen Anzahl entgegengesetzter Vorstellungen. Nur werden natürlich die speciellen Untersuchungen immer verwickelter. Wir werden uns daher mit den allgemeinsten Umrissen begnügen müssen, die uns jedoch die Ueberzeugung gewähren, dass für eine beliebige Anzahl von Vorstellungen die Bedingungen des Verschwindens einer oder mehrerer derselben ähnliche sind wie für drei.

Seien allgemein n unter einander entgegengesetzte Vorstellungen gegeben, deren Intensitäten nach der absteigenden Folge ihrer Grösse $a_1, a_2, \ldots a_k, a_{k+1}, \ldots a_n$ sein mögen, so dass also für jeden Werth von k, $a_k > a_{k+1}$. Seien ferner $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k, \ldots \alpha_n$ die Summen der Gegensätze jeder der n Vorstellungen gegen alle übrigen. Nach §. 50. kann die HS. durch $\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \ldots + \mu_n a_n$ ausgedrückt werden, wo einer der Coëfficienten $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$ Null sein muss, die übrigen aber durch die Gegensätze der Vorstellungen gegeben sind. Bezeichnet nun x_k die Hemmung von a_k, so ist

$$x_k = \frac{\alpha_k(\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \ldots + \mu_n a_n)}{a_k\left(\frac{\alpha_1}{a_1} + \frac{\alpha_2}{a_2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{a_n}\right)}.$$

Setzt man nun $x_k = a_k$, so erhält man die Bedingungsgleichung, durch welche der statische Grenzwerth von a_k gegeben ist. Es findet sich folgende

$$a_k^2\left(\frac{\alpha_1}{a_1} + \frac{\alpha_2}{a_2} + \ldots + \frac{\alpha_{k-1}}{a_{k-1}} + \frac{\alpha_{k+1}}{a_{k+1}} + \ldots + \frac{\alpha_n}{a_n}\right) + a_k \alpha_k (1 - \mu_k)$$
$$- \alpha_k(\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \ldots + \mu_{k-1} a_{k-1} + \mu_{k+1} a_{k+1} + \ldots + \mu_n a_n) = 0;$$

in Beziehung auf a_k also wieder nur eine Gleichung vom zweiten Grade. Da der Inhalt sämmtlicher Parenthesen immer positiv ist, so zeigen die Vorzeichen der drei Glieder der Gleichung, dass diese eine positive und eine negative reelle Wurzel haben muss, von denen die letztere unsre Aufgabe

nichts angeht, die erstere aber den statischen Grenzwerth von a_k unter der Voraussetzung ausdrückt, dass derselbe zugleich mit den Bedingungen

$$a_1 > a_2 \ldots > a_{k-1} > a_k > a_{k+1} \ldots > a_n$$

in Uebereinstimmung sei. Für $\mu_k = 1$ geht die Gleichung in eine reine quadratische über und man erhält für list. a_k einen eben so einfachen Ausdruck, wie in §. 66. (1) für list. c gefunden worden ist.

71.

Nehmen wir jetzt die Gegensätze aller Vorstellungen als gleich, die Intensitäten ungleich an und setzen diesen gleichen Gegensatz $= m$, so wird

$$\text{HS.} = m(a_2 + a_3 + \ldots + a_{k-1} + a_{k+1} + \ldots + a_n);$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots \alpha_k = \ldots = \alpha_n;$$

daher geht dann die Gleichung des vorigen §'s in folgende über:

$$a_k^2 \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{k-1}} + \frac{1}{a_{k+1}} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) + a_k(1-m)$$
$$- m(a_2 + a_3 + \ldots + a_{k-1} + a_{k+1} + \ldots + a_n) = 0.$$

Ist $m = 1$, so dass alle Vorstellungen im vollen Gegensatz stehen, so wird

$$\text{list. } a_k = \sqrt{\frac{a_2 + a_3 + \ldots + a_{k-1} + a_{k+1} + \ldots + a_n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{k-1}} + \frac{1}{a_{k+1}} + \ldots + \frac{1}{a_n}}}. \qquad (1)$$

Dieser Werth muss aber $< a_{k-1}$ sein. Diese Bedingung giebt entwickelt

$$a_2 + a_3 + \ldots + a_{k-2} + a_{k+1} + \ldots + a_n$$
$$< a_{k-1}^2 \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{k-2}} + \frac{1}{a_{k+1}} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right);$$

woraus folgt

$$a_{k-1} > \sqrt{\frac{a_2 + a_3 + \ldots + a_{k-2} + a_{k+1} + \ldots + a_n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{k-2}} + \frac{1}{a_{k+2}} + \ldots + \frac{1}{a_n}}}. \qquad (2)$$

Die Vergleichung dieses Ausdrucks mit dem unter (1) zeigt, dass er der statische Grenzwerth von a_{k-1} in Bezug auf a_1, $a_2, \ldots a_{k-2}$, $a_{k+1} \ldots a_n$ ist, und dass also, damit a_k einen statischen Grenzwerth habe, die nächste ihr in der geordneten Reihe der Vorstellungen vorangehende

a_{k-1} grössser sein muss als der statische Grenzwerth, der ihr in Beziehung auf alle übrigen Vorstellungen, mit alleinigem Ausschluss von a_k, zukommt.

Da nun aber auch $a_{k-1} < a_{k-2}$, so muss der Werth in (2) dieser Bedingung genügen. Sie giebt, auf die nämliche Weise entwickelt,

$$a_{k-2} > \sqrt{\frac{a_2 + a_3 + \ldots + a_{k-3} + a_{k+1} + \ldots + a_n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{k-3}} + \frac{1}{a_{k+1}} + \ldots + \frac{1}{a_n}}};$$

was wieder zeigt, dass a_{k-2} nicht kleiner sein darf als sein statischer Grenzwerth in Bezug auf alle übrigen Vorstellungen, mit Ausschluss derer zwischen a_{k-3} und a_{k+1}. Auf diese Art zu schliessen fortfahrend kommt man endlich auf die Bedingungen

$$a_3 > \sqrt{\frac{a_2 + a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_{k+1}} + \frac{1}{a_{k+2}} + \ldots + \frac{1}{a_n}}};$$

$$a_2 > \sqrt{\frac{a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_{k+1}} + \frac{1}{a_{k+2}} + \ldots + \frac{1}{a_n}}}.$$

Dass auch diese letzte Bedingung noch möglich ist, ergiebt sich, wenn man sie auf folgende Form bringt:

$$a_2 > a_1 \sqrt{\frac{\frac{a_{k+1}}{a_1} + \frac{a_{k+2}}{a_1} + \ldots + \frac{a_n}{a_1}}{1 + \frac{a_1}{a_{k+1}} + \frac{a_1}{a_{k+2}} + \ldots + \frac{a_1}{a_n}}}.$$

Hier sind nämlich die im Zähler vorkommenden Brüche < 1, die ihnen entsprechenden Reciproken im Nenner > 1, also die Wurzelgrösse < 1, also kann a_2 grösser als der Ausdruck zur Rechten des Ungleichheitszeichens sein, obwohl $a_2 < a_1$ ist.

Fassen wir jetzt Alles zusammen, so erhalten wir folgenden Satz: Soll unter einer beliebigen Anzahl voll entgegengesetzter ungleicher Vorstellungen irgend eine, a_k, in Beziehung auf alle andern einen statischen Grenzwerth haben, so ist es nothwendig, dass jede der a_k an Grösse vorangehende Vorstellung a_{k-1}, a_{k-2} usw. grösser sei als der statische Grenzwerth, der ihr in Bezug auf alle übrigen Vorstellungen, mit Aus-

schluss von denen, die zwischen ihr und a_k liegen, und von a_k selbst, zukommt.

72.

Andrerseits ist aber auch $a_k > a_{k+1}$. Daher muss der statische Grenzwerth von a_k im vorigen §. auch dieser Bedingung entsprechen. Sie giebt auf die nämliche Weise wie zuvor

$$a_{k+1} < \sqrt{\frac{a_2 + a_3 + \ldots + a_{k-1} + a_{k+2} + \ldots + a_n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{k-1}} + \frac{1}{a_{k+2}} + \ldots + \frac{1}{a_n}}}. \qquad (3)$$

Es muss also a_{k+1} kleiner als sein statischer Grenzwerth in Bezug auf die Vorstellungen $a_1, a_2, \ldots a_{k-1}, a_{k+2}, \ldots a_n$ sein.

Da nun aber auch $a_{k+1} > a_{k+2}$, so folgt auf dieselbe Weise

$$a_{k+2} < \sqrt{\frac{a_2 + a_3 + \ldots + a_{k-1} + a_{k+3} + \ldots + a_n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{k-1}} + \frac{1}{a_{k+3}} + \ldots + \frac{1}{a_n}}}.$$

Aehnliche Bedingungen ergeben sich für a_{k+3}, a_{k+4} usw., so dass man zuletzt erhält

$$a_{n-1} < \sqrt{\frac{a_2 + a_3 + \ldots + a_{k-1} + a_n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{k-1}} + \frac{1}{a_n}}};$$

$$a_n < \sqrt{\frac{a_2 + a_3 + \ldots + a_{k-1}}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{k-1}}}}.$$

Fassen wir auch diese Resultate zusammen, so erhalten wir folgenden, den im vorigen §. enthaltenen ergänzenden Satz: Soll unter einer beliebigen Anzahl voll entgegengesetzter ungleicher Vorstellungen irgend eine, a_k, in Beziehung auf alle übrigen einen statischen Grenzwerth haben, so ist es nothwendig, dass jede der a_k an Grösse nachstehende Vorstellung a_{k+1}, a_{k+2} usw. kleiner sei als der statische Grenzwerth, der ihr in Beziehung auf alle übrigen Vorstellungen, mit Ausschluss von denen, die zwischen ihr und a_k liegen, und von a_k selbst, zukommt.

Dieser Satz gilt *a fortiori* auch dann noch, wenn a_k kleiner als sein statischer Grenzwerth in Beziehung auf die übri-

gen Vorstellungen sein soll. Dagegen muss dann nicht nothwendiger Weise auch der Satz im vorigen §. gelten. Denn es kann a_k kleiner als die Wurzelgrösse (1) im vorigen §. und zugleich kleiner als a_{k-1} sein, ohne dass auch jene Wurzelgrösse kleiner als a_{k-1} zu sein braucht.

73.

Wir wollen jetzt noch einige specielle Betrachtungen über die statischen Grenzwerthe voll entgegengesetzter Vorstellungen anstellen.

1. Sind von den n gegebenen Vorstellungen die ν stärksten gleich, so ist für keine derselben ein statischer Grenzwerth möglich. Dies versteht sich eigentlich von selbst. Es ergiebt sich aber auch aus §. 71. (1). Denn es wird dann, weil $a_1 = a_2 = \ldots a_k = \ldots = a_\nu$,

$$\text{list. } a_k = \sqrt{\frac{(\nu-2)\,a_\nu + a_{\nu+1} + \ldots. + a_n}{(\nu-1)\frac{1}{a_\nu} + \frac{1}{a_{\nu+1}} + \ldots. + \frac{1}{a_n}}}.$$

Da aber $a_k = a_\nu$, so folgt hieraus

$$a_\nu + a_\nu^2\left(\frac{1}{a_{\nu+1}} + \frac{1}{a_{\nu+2}} + \ldots. + \frac{1}{a_n}\right) = a_{\nu+1} + a_{\nu+2} + \ldots. + a_n;$$

$$\text{oder } a_\nu + a_\nu\left(\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} + \frac{a_\nu}{a_{\nu+2}} + \ldots. + \frac{a_\nu}{a_n}\right) = a_{\nu+1} + a_{\nu+2} + \ldots. + a_n;$$

Da nun aber $a_\nu > a_{\nu+1} > a_{\nu+2} \ldots. > a_n$, so sind die Brüche in der Parenthese zur Linken des Gleichheitszeichens sämmtlich > 1, daher das Product aus a_ν in die Parenthese, folglich um so mehr der ganze linke Theil der Gleichung grösser als der rechte, also der obige Grenzwerth unmöglich. Dies hat, wie sich ohnedies von selbst versteht, auch noch Gültigkeit, wenn $a_\nu = a_{\nu+1} = \ldots. = a_n$.

2. Sind aber auch von den n Vorstellungen die ν stärksten ungleich, so können doch die beiden stärksten unter ihnen, a_1, a_2, nie einen statischen Grenzwerth haben. Denn aus §. 71. (1) geht unmittelbar hervor, dass k nicht kleiner als 3 sein kann, da der Zähler unter dem Wurzelzeichen mit a_2 anfängt und also a_{k-1} höchstens $= a_2$ ist. Dagegen können alle schwächeren Vorstellungen Grenzwerthe haben. So findet sich z. B.

$$\text{list. } a_3 = \sqrt{\frac{a_2 + a_4 + a_5 + \ldots + a_n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_4} + \ldots + \frac{1}{a_n}}};$$

und als die einzige Bedingung der Möglichkeit dieses Werthes

$$a_2 > \sqrt{\frac{a_4 + a_5 + \ldots + a_n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_4} + \ldots + \frac{1}{a_n}}}.$$

3. Sind von den n Vorstellungen die ν stärkeren und ebenso die $n-\nu$ schwächeren unter sich gleich, also $a_1 = a_2 \ldots = a_\nu$ und $a_{\nu+1} = a_{\nu+2} \ldots = a_n$, aber $a_1 > a_n$, so folgt aus §. 71. (1)

$$\text{list. } a_n = a_1 \sqrt{\frac{\nu-1}{\nu}}.$$

Da dieser Ausdruck nur von der Anzahl der stärkeren Vorstellungen abhängig ist, so gilt er unabhängig von der Anzahl der schwächern. Wenn daher eine Anzahl unter sich gleicher, voll entgegengesetzter Vorstellungen vermögend ist, eine einzige ihnen voll entgegengesetzte schwächere Vorstellung aus dem Bewusstsein zu verdrängen, so vermag sie es auch für eine beliebige Anzahl solcher unter einander gleicher und sich sowie den andern stärkeren voll entgegengesetzter Vorstellungen.

Je grösser ν ist, um so näher kommt a_n dem Werthe von a_1. Sind also die stärkeren gleichen Vorstellungen in grosser Anzahl gegeben, so brauchen ihnen die schwächeren an Intensität nur wenig nachzustehen, um vor ihnen aus dem Bewusstsein weichen zu müssen.

Ist z. B. $\nu = 2$, so wird list. $a_n = a_1 \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \tfrac{1}{2} a_1 \sqrt{2}$. Es vermögen also zwei Vorstellungen von der Intensität a_1 eine beliebige Anzahl von Vorstellungen von der Intensität $\tfrac{1}{2} a_1 \sqrt{2}$ aus dem Bewusstsein zu verdrängen, sobald nur sämmtliche Vorstellungen zu einander im vollen Gegensatz stehen.

Ist $\nu = n-1$, so wird list. $a_n = a_1 \sqrt{\frac{n-2}{n-1}}$. Hier verschwindet nur eine Vorstellung a_n neben den $n-1$ stärkeren a_1 aus dem Bewusstsein, aber je grösser n ist, um so näher wird ihre Intensität der von a_1 kommen.

74.

4. Sind ferner unter den gegebenen voll entgegengesetzten n Vorstellungen die ν stärkeren $a_1, a_2, \ldots a_\nu$ ungleich, die $n-\nu$ schwächeren $a_{\nu+1}, a_{\nu+2}, \ldots a_n$ aber gleich, so ist

$$\text{list. } a_n = \sqrt{\frac{a_2 + a_3 + \ldots + a_\nu}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_\nu}}};$$

derselbe statische Grenzwerth, der gelten würde, wenn den Vorstellungen $a_1, a_2, \ldots a_\nu$ eine einzige a_n in vollem Gegensatz gegenüberstände. Wenn also eine Anzahl ungleicher und voll entgegengesetzter Vorstellungen vermögend ist, eine einzige ihnen voll entgegengesetzte schwächere Vorstellung aus dem Bewusstsein zu verdrängen, so vermag sie es auch für eine beliebige Anzahl solcher unter einander gleicher und sich so wie den stärkeren voll entgegengesetzter Vorstellungen.

Dieser Satz ergänzt den unter 3. im vor. §., wie denn auch, wenn $a_1 = a_2, \ldots = a_\nu$, die vorstehende Formel in die dortige übergeht. Giebt man letzterer die Form $\sqrt{\frac{(\nu-1)\,a_\nu}{\frac{\nu}{a_\nu}}}$, was wegen $a_1 = a_\nu$ erlaubt ist, so zeigt sich leicht, dass dieser Werth kleiner ist als der obige statische Grenzwerth für ungleiche $a_1, a_2, \ldots a_\nu$, von denen a_ν am kleinsten ist. Denn es ist

$$(\nu-1)\,a_\nu < a_2 + a_3 + \ldots + a_\nu,$$

und

$$\frac{\nu}{a_\nu} > \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_\nu}.$$

Daher können hier die Vorstellungen, welche aus dem Bewusstsein verdrängt werden, noch stärker sein, als wenn die stärkeren Vorstellungen unter sich gleich und nicht stärker sind als die schwächste der verdrängenden ungleichen Vorstellungen im gegenwärtigen Falle.

Der vorstehende Satz, so wie der unter No. 3. im vor. §. könnten paradox erscheinen, wenn man sich nicht besönne, dass nicht blos die stärkeren Vorstellungen die schwächeren, sondern auch diese sich unter einander hemmen*.

* Man kann hierbei auch vergleichen §. 47, 5; §. 49, 5; §. 50, 5.

5. Sind umgekehrt die stärkeren Vorstellungen $a_1, a_2, \ldots a_\nu$ gleich, die schwächeren $a_{\nu+1}, a_{\nu+2}, \ldots a_n$ aber ungleich, so wird

$$\text{list. } a_{\nu+1} = \sqrt{\frac{(\nu-1)\,a_1 + a_{\nu+2} + a_{\nu+3} + \ldots + a_n}{\frac{\nu}{a_1} + \frac{1}{a_{\nu+2}} + \frac{1}{a_{\nu+3}} + \ldots + \frac{1}{a_n}}}.$$

Zugleich muss aber auch (§. 71.) sein

$$a_{\nu+2} < \sqrt{\frac{(\nu-1)\,a_1 + a_{\nu+3} + a_{\nu+4} + \ldots + a_n}{\frac{\nu}{a_1} + \frac{1}{a_{\nu+3}} + \frac{1}{a_{\nu+4}} + \ldots + \frac{1}{a_n}}};$$

$$a_{\nu+3} < \sqrt{\frac{(\nu-1)\,a_1 + a_{\nu+4} + a_{\nu+5} + \ldots + a_n}{\frac{\nu}{a_1} + \frac{1}{a_{\nu+4}} + \frac{1}{a_{\nu+5}} + \ldots + \frac{1}{a_n}}};$$

. . . .

$$a_{n-1} < \sqrt{\frac{(\nu-1)\,a_1 + a_n}{\frac{\nu}{a_1} + \frac{1}{a_n}}};$$

$$a_n < \sqrt{\frac{(\nu-1)\,a_1}{\frac{\nu}{a_1}}}.$$

Es muss also die Intensität der schwächsten Vorstellung a_n kleiner sein als der statische Grenzwerth, den sie haben würde, wenn sie allein den ν stärkeren und unter sich gleichen Vorstellungen gegenüberstände. Dass aber, wenn $a_{\nu+1}$ einen statischen Grenzwerth hat, die ihr an Grösse nachstehenden $a_{\nu+2}$, $a_{\nu+3}, \ldots a_n$ sämmtlich mit ihr zugleich aus dem Bewusstsein weichen müssen, ergiebt sich aus folgender Betrachtung.

6. Verstehen wir unter list. a_k, wie bisher, den Grenzwerth, der a_k in Beziehung auf $a_1, a_2, \ldots a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots a_n$ zukommt, und eben so unter list. a_{k+1} den Grenzwerth von a_{k+1} in Beziehung auf $a_1, a_2, \ldots a_{k-1}, a_k, a_{k+2}, \ldots a_n$, so ist allgemein, wenn $a_k > a_{k+1}$,

$$\text{list. } a_k < \text{list. } a_{k+1}.$$

Denn setzen wir zur Abkürzung in §. 71. (1)

$$\text{list. } a_k = \sqrt{\frac{M}{N}},$$

so ergiebt sich durch Vertauschung von k mit $k+1$

$$\text{list. } a_{k+1} = \sqrt{\frac{M + a_k - a_{k+1}}{N + \frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}}};$$

ein Werth, der, da $a_k - a_{k+1} > 0$ und $\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} < 0$, offenbar $> \sqrt{\frac{M}{N}}$ ist. Wenn also $a_k = \sqrt{\frac{M}{N}}$ ist, mithin aus dem Bewusstsein verschwindet, so ist a_{k+1}, welches $< a_k$, auch $< \sqrt{\frac{M}{N}}$, also noch mehr $< \sqrt{\frac{M + a_k - a_{k+1}}{N + \frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}}}$, d. h. es liegt unter seinem statischen Grenzwerth und verschwindet also mit noch mehr Grund aus dem Bewusstsein. Da nun dasselbe Verhältniss zwischen a_{k+1} und a_{k+2}, a_{k+2} und a_{k+3} u. s. f. stattfindet, so werden, wenn a_k aus dem Bewusstsein verschwinden muss, zugleich auch alle schwächeren Vorstellungen aus dem Bewusstsein weichen müssen. Ist dagegen $a_{k+1} = \sqrt{\frac{M + a_k - a_{k+1}}{N + \frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}}}$, so ist a_k grösser als dieser Werth, folglich um so mehr grösser als $\sqrt{\frac{M}{N}}$; es liegt also über seinem statischen Grenzwerth und verschwindet demnach nicht.

Vierter Abschnitt.

Vom Gleichgewicht zusammengesetzter Vorstellungen.

I. Vom Gleichgewicht vollkommener Complexionen.

75.

Unter vollkommenen Complexionen sind diejenigen Verbindungen disparater Vorstellungen zu verstehen, welche zu Stande kommen, wenn die letzteren völlig ungehemmt im Bewusstsein zusammentreffen und ihnen zu ihrer Verbindung die nöthige Zeit gegeben ist. Diese Vorstellungen machen dann ein untheilbares Ganzes aus, eine zusammengesetzte Vorstellung,

von der keiner der beiden ungleichartigen Bestandtheile durch eine ihm entgegengesetzte Vorstellung eine Hemmung erleiden kann, ohne dass der andre mit gehemmt wird, zugleich aber auch der Hemmung widerstrebt. Sie tragen also alle Hemmungen gemeinschaftlich, und die Intensität einer vollkommenen Complexion ist die Summe der Intensitäten ihrer Bestandtheile. Diesen Begriffen gemäss können wir nun für die Berechnung des Gleichgewichts vollkommener Complexionen folgende Grundsätze aufstellen.

1. Die HS. zwischen einer vollkommenen Complexion und andern gleichzeitig gegebenen Complexionen oder einfachen Vorstellungen ist gleich der Summe der HSS., die sich zwischen den disparaten Bestandtheilen der ersten Complexion und den ihr entgegengesetzten einfachen Vorstellungen oder den Bestandtheilen der andern Complexionen bilden. Sei z. B. die Vorstellung einer Farbe von der Intensität $= a$ mit der eines Klanges $= \alpha$ und eines Geruchs $= \alpha'$ vollkommen complicirt, und es stellen sich dieser Complexion andre Vorstellungen von Farben, Klängen und Gerüchen, einfach oder mit einander complicirt gegenüber, so ist die HS. gleich der Summe der drei HSS., die sich zwischen den Farben, den Klängen und den Gerüchen bilden.

2. Der Antheil einer jeden vollkommenen Complexion an der HS. ist umgekehrt proportional der Summe der Intensitäten ihrer Bestandtheile, oder der Intensität der Complexion selbst. Denn jeder Bestandtheil, wenn ihm auch nicht selbst eine entgegengesetzte Vorstellung gegenübersteht, nimmt doch nach Proportion seiner Intensität Antheil an dem, was der andre zu leiden hat, und verstärkt hierdurch sein Widerstreben, vermindert seine Nachgiebigkeit gegen die Hemmung.

3. Der Antheil einer jeden vollkommenen Complexion an der HS. vertheilt sich auf ihre einzelnen Bestandtheile nach dem directen Verhältniss ihrer Intensität zu der der Complexion; also nicht nach dem umgekehrten Verhältniss der Intensitäten, wie bei entgegen-

gesetzten Vorstellungen, die unverbunden einander gegenüberstehen. Denn die verbundenen Bestandtheile bilden ein Ganzes, dessen Theile in demselben Maasse, in welchem sie zum Ganzen beitragen, leiden werden. Die Complexion verhält sich hinsichtlich des Leidens wie eine homogene Vorstellung.

Mit Hülfe dieser Grundsätze können wir nun die einfachsten das Gleichgewicht vollkommener Complexionen betreffenden Aufgaben ohne Schwierigkeit lösen.

76.

Sei gegeben eine aus zwei (disparaten) Vorstellungen a, α zusammengesetzte vollkommene Complexion, deren Intensität A also nach dem Vorigen $= a + \alpha$ sein wird; desgleichen eine dem Bestandtheil a im Grade m entgegengesetzte einfache Vorstellung b; es fragt sich, wie gross die Hemmungen dieser drei Vorstellungen, die beziehungsweise durch x, ξ, y bezeichnet werden mögen, sein müssen, wenn die Complexion mit der einfachen Vorstellung im Gleichgewicht sein soll.

Was zunächst die HS. $= S$ betrifft, so kann diese hier keine andre sein als die, welche zwischen a und b sich bilden würde, wenn ersteres mit α nicht complicirt wäre; denn dem α steht keine entgegengesetzte Vorstellung gegenüber. Es ist also, wenn $a > b$, $S = mb$, wenn $a < b$, $S = ma$.

Sei X zuerst die Hemmung der ganzen Complexion A, so ist, wenn N eine sogleich näher zu bestimmende Zahl bedeutet, nach Nr. 2. des vor. §'s,

$$X = \frac{NS}{A}; \quad y = \frac{NS}{b};$$

folglich, da zugleich $\quad X + y = S,$

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{A} + \frac{1}{b};$$

daher

$$X = \frac{bS}{A+b}; \quad y = \frac{AS}{A+b}.$$

Aber nach Nr. 3. des vor. §'s

$$x = \frac{aX}{A}; \quad \xi = \frac{\alpha X}{A};$$

daher vollständig

$$x = \frac{abS}{A(A+b)}; \quad \xi = \frac{\alpha bS}{A(A+b)}; \quad y = \frac{AS}{A+b}.$$

Wir erläutern diese Formeln durch einige Beispiele, durch welche der Unterschied complicirter Vorstellungen von nicht complicirten sich deutlicher darstellen wird.

1. Sei $a = 3$, $\alpha = 2$, $b = 1$, $m = 1$; also $A = 5$, $S = 1$, so findet sich

$$x = 0{,}1;\quad \xi = 0{,}067;\quad y = 0{,}833.$$

Stände a ohne Verbindung mit α der Vorstellung b allein gegenüber, so würde (§. 51.)

$$x = 0{,}25;\quad y = 0{,}75.$$

2. Sei umgekehrt $a = 1$, $\alpha = 2$, $b = 3$, $m = 1$; also $A = 3$, $S = 1$, so wird

$$x = 0{,}167;\quad \xi = 0{,}333;\quad y = 0{,}5.$$

Ohne α wäre dagegen

$$x = 0{,}75;\quad y = 0{,}25.$$

3. Sei $a = 10$, $\alpha = 2$, $b = 1$, $m = 1$, also $A = 12$, $S = 1$, so wird

$$x = 0{,}064;\quad \xi = 0{,}013;\quad y = 0{,}923.$$

Ohne α wäre dagegen

$$x = 0{,}09;\quad y = 0{,}91.$$

4. Sei umgekehrt $a = 1$, $b = 10$, alles Uebrige wie zuvor, also $A = 3$, $S = 1$, so folgt

$$x = 0{,}256;\quad \xi = 0{,}512;\quad y = 0{,}231.$$

Ohne α dagegen wäre

$$x = 0{,}91;\quad y = 0{,}09.$$

In allen diesen Beispielen sieht man, wie a durch seine Complication mit α gewinnt, indess b durch die Verstärkung, die a von α erhält, verliert, und dass jener Gewinn grösser ist als dieser Verlust. Dieses Resultat ist allgemein. Denn da, wenn a und b allein gegeben sind, $x = \frac{bS}{a+b}$, $y = \frac{aS}{a+b}$, so ist der Gewinn von a oder die Verminderung seiner Hemmung durch die Complication mit α

$$= \left(\frac{1}{a+b} - \frac{a}{A(A+b)}\right) bS = \frac{(2a+b+\alpha)\,\alpha bS}{A(A+b)(a+b)};$$

was jederzeit eine positive Grösse ist. Eben so ist der Verlust von b oder die Vermehrung seiner Hemmung in Folge der Complication von a mit α

$$= \left(\frac{A}{A+b} - \frac{a}{a+b}\right) S = \frac{\alpha bS}{(A+b)(a+b)}$$

gleichfalls eine positive Grösse, von der überdies sich sogleich findet, dass sie kleiner als die vorige ist. Auch wächst sie zugleich mit α. Daher ist auch der Gewinn von a um so grösser, je grösser α. Die Hemmung von α selbst muss nothwendig um so grösser sein, je grösser es selbst ist und je mehr es daher a Hülfe leistet.

77.

Stehe der vollkommenen Complexion $a + \alpha = A$ eine andre vollkommene Complexion $b + \beta = B$ dergestalt entgegen, dass der Gegensatz zwischen a und $b = m$, der zwischen α und β $= \mu$ sei.

Sei X die Hemmung von A, Y die von B, S die HS. zwischen a und b, Σ die zwischen α und β, so ist die HS. der Complexionen $= S + \Sigma$. Hieraus folgt auf dieselbe Weise wie zuvor

$$X = \frac{B(S+\Sigma)}{A+B}; \quad Y = \frac{A(S+\Sigma)}{A+B};$$

und wenn x, y, ξ, η der Reihe nach die Hemmungen von a, b, α, β bezeichnen,

$$x = \frac{aB(S+\Sigma)}{A(A+B)}; \quad y = \frac{bA(S+\Sigma)}{B(A+B)};$$

$$\xi = \frac{\alpha B(S+\Sigma)}{A(A+B)}; \quad \eta = \frac{\beta A(S+\Sigma)}{B(A+B)}.$$

Hier können ebensowohl zwei entgegengesetzte als zwei disparate Vorstellungen durch die Complication gewinnen.

Sei z. B. $a = 8$, $b = 2$, $m = \frac{1}{2}$; $\alpha = 12$, $\beta = 3$, $\mu = 1$; also $A = 20$, $B = 5$, $S = 1$, $\Sigma = 3$; so findet sich

$$x = 0{,}32; \quad y = 1{,}28; \quad \xi = 0{,}48; \quad \eta = 1{,}92.$$

Ständen a und b, α und β ohne Complication einander gegenüber, so würde sein

$$x = 0{,}2; \quad y = 0{,}8; \quad \xi = 0{,}6; \quad \eta = 2{,}4.$$

Es gewinnen also hier durch die Complication α und β, verlieren dadurch a und b.

Sei dagegen $\alpha = 3$, $\beta = 12$, indess alle übrigen Werthe unverändert bleiben, so wird $A = 11$, $B = 14$, $S = 1$, $\Sigma = 3$; daher, wenn a mit α, b mit β complicirt ist,

$$x = 1{,}63; \quad y = 0{,}25; \quad \xi = 0{,}61; \quad \eta = 1{,}51.$$

Ohne Complication aber würde sein

$$x = 0{,}2;\quad y = 0{,}8;\quad \xi = 2{,}4;\quad \eta = 0{,}6;$$

so dass also α und b durch die Complication gewinnen, a und β verlieren.

78.

Aus den Formeln des vorigen §'s ergeben sich mehrere beachtungswerthe Folgerungen.

1. Vergleicht man die Ausdrücke der den Complexionen A, B im Gleichgewicht zukommenden Hemmungen X, Y mit den Hemmungen, welche zwei einfache Vorstellungen a, b im Gleichgewicht haben müssen (§. 43.), so ergiebt sich, da, wenn $a > b$ und $\alpha > \beta$, auch geschrieben werden kann

$$X = \frac{(mb + \mu\beta)}{b + \beta} \cdot \frac{BB}{A + B};\qquad Y = \frac{(mb + \mu\beta)}{b + \beta} \cdot \frac{AB}{A + B};$$

dass sich hinsichtlich ihrer Hemmungen im Gleichgewicht die vollkommenen Complexionen A, B so verhalten, als ob sie zwei einfache im Grade $\frac{mb + \mu\beta}{b + \beta}$ entgegengesetzte Vorstellungen wären. Ist $a > b$, aber $\alpha < \beta$, jedoch immer noch $A > B$, so verhalten sich A, B wie zwei einfache im Grade $\frac{mb + \mu\alpha}{b + \beta}$ entgegengesetzte Vorstellungen.

2. Für die paarweise complicirten Vorstellungen a, α und b, β ist

$$\frac{x}{y} = \frac{aB^2}{bA^2};\qquad \frac{\xi}{\eta} = \frac{\alpha B^2}{\beta A^2}.$$

Ohne die Complication würde sein

$$\frac{x}{y} = \frac{b}{a};\qquad \frac{\xi}{\eta} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Hier ist nun $\frac{aB^2}{bA^2} \gtreqless \frac{b}{a}$, je nachdem $\frac{B}{A} \gtreqless \frac{b}{a}$, d. i. $\frac{a}{b} \gtreqless \frac{\alpha}{\beta}$;

und ebenso $\frac{\alpha B^2}{\beta A^2} \gtreqless \frac{\beta}{\alpha}$, je nachdem $\frac{B}{A} \gtreqless \frac{\beta}{\alpha}$, d. i. $\frac{b}{a} \gtreqless \frac{\beta}{\alpha}$ oder $\frac{a}{b} \lesseqgtr \frac{\alpha}{\beta}$.

Die Vorstellungen hemmen sich also, wenn a und α, b und β mit einander complicirt sind, nach demselben Verhältniss, in welchem es geschehen würde, wenn sie nicht complicirt wären, sofern $a : b = \alpha : \beta$, d. i. die gleichartigen Bestandtheile einander direct proportional sind.

Ist aber $\frac{a}{b} > \frac{\alpha}{\beta}$, so ist, wenn die Vorstellungen complicirt sind, $\frac{x}{y}$ grösser und $\frac{\xi}{\eta}$ kleiner als die Verhältnissquotienten der entsprechenden Hemmungen sein würden, wenn a und α, b und β nicht complicirt wären.

Ist endlich $\frac{a}{b} < \frac{\alpha}{\beta}$, so ist, wenn die Vorstellungen complicirt sind, $\frac{x}{y}$ kleiner und $\frac{\xi}{\eta}$ grösser als die Verhältnissquotienten der entsprechenden Hemmungen sein würden, wenn a und α, b und β nicht complicirt wären.

3. Es ist $\frac{x}{a} = \frac{\xi}{\alpha}$; $\frac{y}{b} = \frac{\eta}{\beta}$; daher wenn r, s, ρ, σ der Reihe nach die Reste von a, b, α, β bedeuten, auch

$$\frac{r}{a} = \frac{\rho}{\alpha}; \quad \frac{s}{b} = \frac{\sigma}{\beta}.$$

Es sind also nicht nur die Hemmungen, sondern auch die Reste der Bestandtheile einer und derselben Complexion den Intensitäten der Bestandtheile direct proportional; oder, was dasselbe: es sind sowohl die Grade der Hemmung als die Grade der restirenden Freiheit der Bestandtheile einer und derselben Complexion einander gleich (vgl. §. 32.); eine unmittelbare Folge des dritten Grundsatzes in §. 75.

4. Ist $a : \alpha = b : \beta$, so wird auch

$$x : \xi = y : \eta = r : \rho = s : \sigma = a : \alpha = b : \beta.$$

Sind also die Bestandtheile der einen Complexion den gleichnamigen Bestandtheilen der andern direct proportional, so stehen sowohl die Hemmungen als die Reste der Bestandtheile zu einander in demselben Verhältniss wie die Bestandtheile selbst.

79.

Die Proportionalität der Bestandtheile der beiden Complexionen A, B führt noch zu weiteren Folgerungen über die Grösse der Hemmungen. Wenn nämlich

1. $a : \alpha = b : \beta$, aber $m \gtrless \mu$, so ist, nach §. 77.,

$$x = \frac{ab\,(S+\Sigma)}{A\,(a+b)} = \frac{bb\,(S+\Sigma)}{B\,(a+b)};$$

$$y = \frac{ab\,(S+\Sigma)}{B\,(a+b)} = \frac{aa\,(S+\Sigma)}{A\,(a+b)};$$

$$\xi = \frac{\alpha\beta\,(S+\Sigma)}{A\,(\alpha+\beta)} = \frac{\beta\beta\,(S+\Sigma)}{B\,(\alpha+\beta)};$$

$$\eta = \frac{\alpha\beta\,(S+\Sigma)}{B\,(\alpha+\beta)} = \frac{\alpha\alpha\,(S+\Sigma)}{A\,(\alpha+\beta)}.$$

Ist nun $m > \mu$, so wird unter der Annahme, dass $a > b$, folglich auch $\alpha > \beta$,

$$S + \Sigma = mb + \mu\beta = m(b + \tfrac{\mu}{m}\beta) < mB;\ \text{daher}$$

$$x < \frac{mbb}{a+b}; \qquad y < \frac{mab}{a+b}.$$

Da aber auch $mb + \mu\beta = \mu(\frac{m}{\mu}b + \beta) > \mu B$,

so wird zugleich

$$\xi > \frac{\mu\beta\beta}{\alpha+\beta}; \qquad \eta > \frac{\mu\alpha\beta}{\alpha+\beta}.$$

Ist dagegen $m < \mu$, so wird

$$S + \Sigma = mb + \mu\beta = m(b + \tfrac{\mu}{m}\beta) > mB;\ \text{daher}$$

$$x > \frac{mbb}{a+b}; \qquad y > \frac{mab}{a+b};$$

Da aber auch $mb + \mu\beta = \mu(\frac{m}{\mu}b + \beta) < \mu B$,

zugleich $\xi < \frac{\mu\beta\beta}{\alpha+\beta}; \qquad \eta < \frac{\mu\alpha\beta}{\alpha+\beta}$.

Da nun in diesen acht Formeln für x, y, ξ und η die Ausdrücke zur Rechten des Ungleichheitszeichens die Hemmungen bedeuten, die a und b, α und β haben müssen, wenn sie ohne Complication einander gegenüberstehen, so ergiebt sich folgender Satz: wenn die gleichnamigen Bestandtheile der beiden vollkommenen Complexionen $a+\alpha$, $b+\beta$ einander direct proportional, die Gegensätze aber ungleich sind, so werden diejenigen Bestandtheile, welche in dem stärkeren Gegensatze stehen, weniger, diejenigen aber, welche in dem schwächeren Gegensatze stehen, mehr gehemmt, als es geschehen würde,

wenn sie sich uncomplicirt als einfache Vorstellungen gegenüberständen.

2. Kommt zu der Proportionalität der gleichnamigen Bestandtheile der beiden Complexionen noch Gleichheit der Gegensätze, so dass $m = \mu$, so können die Complexionen ähnliche heissen, denn sie haben dann nicht blos in quantitativer, sondern auch (vermöge des gleichen Gegensatzes ihrer Qualitäten) in qualitativer Hinsicht gleiche Verhältnisse. Dann aber ist, wenn wir, wie zuvor, $a > b$, folglich auch $\alpha > \beta$ annehmen, $S = mb$ und $\Sigma = \mu\beta = m\beta$, also $S + \Sigma = m(b + \beta) = mB$. Hierdurch gehen die vier ersten Formeln in der vorigen Nr. über in

$$x = \frac{mbb}{a+b}; \qquad y = \frac{mab}{a+b};$$

$$\xi = \frac{\mu\beta\beta}{\alpha+\beta}; \qquad \eta = \frac{\mu\alpha\beta}{\alpha+\beta}.$$

Sind also die beiden Complexionen A, B einander ähnlich, so sind die Hemmungen aller ihrer Bestandtheile eben so gross, als sie sein würden, wenn sie uncomplicirt einander gegenüber ständen. In diesem Falle ist also die Complication der Vorstellungen ohne allen wahrnehmbaren Einfluss auf ihre Hemmungen.

3. Ist $m = \mu$, ohne dass $a:\alpha = b:\beta$, aber sowohl $a > b$ als $\alpha > \beta$, so wird $S + \Sigma = mB$, daher, nach §. 77.,

$$X = \frac{mBB}{A+B}; \qquad Y = \frac{mAB}{A+B}.$$

Sind also die gleichartigen Bestandtheile der Complexionen A, B in gleichem Grade entgegengesetzt und beide Bestandtheile von A grösser als die ihnen gleichartigen von B, so werden die Complexionen als Ganze betrachtet so gehemmt, als ob sie einfache Vorstellungen wären. Die Hemmungen und Reste ihrer Bestandtheile können aber, je nach dem Verhältniss ihrer Intensitäten, grösser oder kleiner sein, als sie uncomplicirt sein würden.

4. Sind die mit a und b bezüglich complicirten Vorstellungen α und β einander nicht entgegengesetzt, sondern disparat, so ist $\mu = 0$ zu setzen, daher auch $\Sigma = 0$; alles Uebrige

bleibt unverändert. Die Complexionen haben dann also eine geringere HS., als wenn beide Paare ihrer Bestandtheile entgegengesetzt sind, und die Hemmungen der entgegengesetzten Bestandtheile, *a*, *b*, fallen in Summe geringer aus, da ihnen die complicirten Vorstellungen α, β nur einen Theil der Hemmung, die sie ohne diese allein tragen müssten, abnehmen, ohne andrerseits eine von dem Gegensatze derselben herrührende Hemmung mit ihnen theilen zu müssen. Es ist dann nämlich, nach §. 77.,

$$x + y = \left(\frac{aB^2 + bA^2}{AB^2 + BA^2}\right) S < S.$$

Dabei kann aber einer der beiden entgegengesetzten Bestandtheile, *a*, *b*, immer noch eine grössere Hemmung erleiden, als er ohne Complication erleiden würde. Denn es ist dann

$$x = \frac{aBS}{A(A+B)}; \qquad y = \frac{bAS}{B(A+B)};$$

welche Werthe einzeln bezüglich kleiner oder grösser als $\frac{bS}{a+b}$, $\frac{aS}{a+b}$, die Hemmungen von *a* und *b* ohne Complication, sein können.

80.

Obgleich die vorstehenden §§. nur die allereinfachsten Aufgaben über das Gleichgewicht vollkommener Complexionen behandeln, so ergeben sich daraus doch schon einige bemerkenswerthe Folgen in Bezug auf die Erklärung bekannter psychologischer Thatsachen.

Zuerst nämlich zeigen die §§. 76. und 77., verbunden mit §. 79. 4., wie der Schein entstehen kann, als ob auch disparate Vorstellungen einander hemmen und damit ihre Klarheit entziehen könnten. Sind z. B. *a* und *b* Vorstellungen von etwas Sichtbarem, α die Vorstellung von etwas Hörbarem, so leidet letztere durch ihre Complication mit *a*, obgleich ihr nichts Gleichartiges entgegensteht. Die der *a* entgegengesetzte Vorstellung *b* äussert nämlich durch Vermittelung von *a* eine um so grössere Wirkung auf α, je grösser dieses ist (§. 76. a. E.). Zugleich vermindert sich in demselben Maasse die Hemmung von *a* und es entsteht der Schein, als ob *b* und α einander direct entgegenwirkten und

zu verdrängen strebten, a aber dabei weniger betheiligt wäre. Hieraus erklärt sich psychologisch, wie ein plötzlich in die Wahrnehmung fallendes Sichtbares die Aufmerksamkeit von einem gleichzeitig gegebenen Hörbaren abziehen und also der Schein entstehen kann, als ob beide, obwohl disparat und daher nicht entgegengesetzt, doch gleichzeitig vorgestellt miteinander unverträglich wären.* Dieselbe Täuschung tritt in dreifacher Beziehung bei dem in §. 79. 4. erwähnten Fall ein, wo z. B. β die Vorstellung eines Fühlbaren sein kann. Das Sichtbare, a, scheint sich nicht mit dem Fühlbaren, β, dieses nicht mit dem Hörbaren, α, und ebenso wenig dieses mit dem Sichtbaren, b, zu vertragen.

Auf ein andres Phänomen der Aufmerksamkeit bezieht sich Nr. 1. des §. 79, wo angenommen wurde, dass die gleichnamigen Bestandtheile von zwei Complexionen einander proportional seien. Nach §. 78. 3. stehen dann nicht nur die Hemmungen, sondern auch die Reste der Bestandtheile im directen Verhältniss der Intensitäten derselben und repräsentiren daher diese. Aber sie sind nicht den Resten gleich, die sie haben würden, wenn sie uncomplicirt einander gegenüberständen. Vielmehr werden hier die Vorstellungen von stärkerem Gegensatz auf Kosten der in geringerem Grade entgegengesetzten gehoben. Sie contrastiren gegen einander und stellen die schwächer entgegengesetzten, die ihnen gleichsam zur Folie dienen, in Schatten. Hierdurch muss aber das Gefühl einer Spannung entstehen. Denn jene contrastirenden Vorstellungen halten sich trotz ihres stärkeren Gegensatzes, vermöge dessen sie einander mehr schwächen sollten, auf einer höhern Stufe der Klarheit, indess die mit ihnen complicirten Vorstellungen trotz ihres schwächeren Gegensatzes tiefer herabgedrückt werden. Jene beharren also über, diese unter dem statischen Punkte, der ihnen ohne Complication zukommen würde. Durch diese aber wird das Tiefersinken der ersteren und das Höhersteigen der letzteren verhindert. Ohnerachtet des Gleichgewichts wird daher das Vorstellen mit dem Gefühl einer

* Empirische Psychologie S. 128; vgl. oben §. 11.

Anstrengung verbunden sein. Hierbei erscheinen die schwächer entgegengesetzten Vorstellungen als Hülfsvorstellungen, durch welche die Aufmerksamkeit auf die stärker entgegengesetzten gelenkt, von ihnen selbst aber abgezogen wird. Natürlich ist diese Aufmerksamkeit immer nur noch eine unwillkürliche, sie kann aber der willkürlichen, bei der noch andre Bedingungen hinzutreten müssen, zu Statten kommen.* In diesem Verhalten complicirter Vorstellungen liegt auch die Andeutung der Erklärung des Verhältnisses der Vorstellung eines Gegenstandes zu der eines ihm entsprechenden Symbols. Das Symbol, wenn es vorgestellt wird, erinnert an den Gegenstand, aber es drängt sich nicht neben ihm hervor, sondern tritt gegen ihn zurück und dient nur seine Vorstellung im Bewusstsein festzuhalten. Es versteht sich indess von selbst, dass unsre Vorstellungen von den Gegenständen nicht durch so einfache Voraussetzungen wie die hier in Rechnung gezogenen dargestellt werden, sondern ganze Systeme mit einander verschmolzener Vorstellungen sind, deren Symbole durch andre solche Systeme von Vorstellungen, die sich zu jenen disparat verhalten (z. B. wie Laute zu Farbigem) und mit ihnen complicirt haben (also etwa die Benennungen sichtbarer Gegenstände), repräsentirt werden. Was sich aber hier im einfachsten Verhältniss zeigte, kann sich da im Grossen wiederholen.

Wenn die Complexionen vollkommen ähnlich sind (§. 79. 2.), so tritt keines der beiden Paare gleichartiger Bestandtheile hinter dem andern zurück. Die disparaten Vorstellungen begleiten hier nur einander, und die Aufmerksamkeit ruht auf beiden, nach Maassgabe ihrer Intensitäten, gleichmässig. Sie stehen also in einem Verhältniss, bei dem kein Theil als untergeordnet und abhängig, keiner als die Hauptsache und der andre nur als die Nebensache erscheint. Denkt man sich eine ganze Reihe solcher ähnlicher Complexionen mit einander verbunden, so mag man sich vielleicht dieses Verhältniss durch die Beziehung erläutern, in welcher eine Curve zu der ihr ent-

* Vgl. Empirische Psychologie §. 101.

74.

4. Sind ferner unter den gegebenen voll entgegengesetzten n Vorstellungen die ν stärkeren $a_1, a_2, \ldots a_\nu$ ungleich, die $n-\nu$ schwächeren $a_{\nu+1}, a_{\nu+2}, \ldots a_n$ aber gleich, so ist

$$\text{list. } a_n = \sqrt{\frac{a_2 + a_3 + \ldots + a_\nu}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_\nu}}};$$

derselbe statische Grenzwerth, der gelten würde, wenn den Vorstellungen $a_1, a_2, \ldots a_\nu$ eine einzige a_n in vollem Gegensatz gegenüberstände. Wenn also eine Anzahl ungleicher und voll entgegengesetzter Vorstellungen vermögend ist, eine einzige ihnen voll entgegengesetzte schwächere Vorstellung aus dem Bewusstsein zu verdrängen, so vermag sie es auch für eine beliebige Anzahl solcher unter einander gleicher und sich so wie den stärkeren voll entgegengesetzter Vorstellungen.

Dieser Satz ergänzt den unter 3. im vor. §., wie denn auch, wenn $a_1 = a_2, \ldots = a_\nu$, die vorstehende Formel in die dortige übergeht. Giebt man letzterer die Form $\sqrt{\frac{(\nu-1)\,a_\nu}{\frac{\nu}{a_\nu}}}$, was wegen $a_1 = a_\nu$ erlaubt ist, so zeigt sich leicht, dass dieser Werth kleiner ist als der obige statische Grenzwerth für ungleiche $a_1, a_2, \ldots a_\nu$, von denen a_ν am kleinsten ist. Denn es ist

$$(\nu-1)\,a_\nu < a_2 + a_3 + \ldots + a_\nu,$$

und

$$\frac{\nu}{a_\nu} > \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_\nu}.$$

Daher können hier die Vorstellungen, welche aus dem Bewusstsein verdrängt werden, noch stärker sein, als wenn die stärkeren Vorstellungen unter sich gleich und nicht stärker sind als die schwächste der verdrängenden ungleichen Vorstellungen im gegenwärtigen Falle.

Der vorstehende Satz, so wie der unter No. 3. im vor. §. könnten paradox erscheinen, wenn man sich nicht besönne, dass nicht blos die stärkeren Vorstellungen die schwächeren, sondern auch diese sich unter einander hemmen*.

* Man kann hierbei auch vergleichen §. 47, 5; §. 49, 5; §. 50, 5.

5. Sind umgekehrt die stärkeren Vorstellungen a_1, a_2,... a_ν gleich, die schwächeren $a_{\nu+1}$, $a_{\nu+2}$,... a_n aber ungleich, so wird

$$\text{list. } a_{\nu+1} = \sqrt{\frac{(\nu-1)\,a_1 + a_{\nu+2} + a_{\nu+3} + \ldots + a_n}{\frac{\nu}{a_1} + \frac{1}{a_{\nu+2}} + \frac{1}{a_{\nu+3}} + \ldots + \frac{1}{a_n}}}.$$

Zugleich muss aber auch (§. 71.) sein

$$a_{\nu+2} < \sqrt{\frac{(\nu-1)\,a_1 + a_{\nu+3} + a_{\nu+4} + \ldots + a_n}{\frac{\nu}{a_1} + \frac{1}{a_{\nu+3}} + \frac{1}{a_{\nu+4}} + \ldots + \frac{1}{a_n}}};$$

$$a_{\nu+3} < \sqrt{\frac{(\nu-1)\,a_1 + a_{\nu+4} + a_{\nu+5} + \ldots + a_n}{\frac{\nu}{a_1} + \frac{1}{a_{\nu+4}} + \frac{1}{a_{\nu+5}} + \ldots + \frac{1}{a_n}}};$$

. . . .

$$a_{n-1} < \sqrt{\frac{(\nu-1)\,a_1 + a_n}{\frac{\nu}{a_1} + \frac{1}{a_n}}};$$

$$a_n < \sqrt{\frac{(\nu-1)\,a_1}{\frac{\nu}{a_1}}}.$$

Es muss also die Intensität der schwächsten Vorstellung a_n kleiner sein als der statische Grenzwerth, den sie haben würde, wenn sie allein den ν stärkeren und unter sich gleichen Vorstellungen gegenüberstände. Dass aber, wenn $a_{\nu+1}$ einen statischen Grenzwerth hat, die ihr an Grösse nachstehenden $a_{\nu+2}$, $a_{\nu+3}$,... . a_n sämmtlich mit ihr zugleich aus dem Bewusstsein weichen müssen, ergiebt sich aus folgender Betrachtung.

6. Verstehen wir unter list. a_k, wie bisher, den Grenzwerth, der a_k in Beziehung auf a_1, a_2,... a_{k-1}, a_{k+1},... a_n zukommt, und eben so unter list. a_{k+1} den Grenzwerth von a_{k+1} in Beziehung auf a_1, a_2,... a_{k-1}, a_k, a_{k+2},... a_n, so ist allgemein, wenn $a_k > a_{k+1}$,

$$\text{list. } a_k < \text{list. } a_{k+1}.$$

Denn setzen wir zur Abkürzung in §. 71. (1)

$$\text{list. } a_k = \sqrt{\frac{M}{N}},$$

so ergiebt sich durch Vertauschung von k mit $k+1$

$$\text{list. } a_{k+1} = \sqrt{\frac{M + a_k - a_{k+1}}{N + \frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}}};$$

$$X = \frac{A}{a} \cdot \frac{mbc(b+c)}{ab+ac+bc} = \frac{A}{\alpha} \cdot \frac{\mu\beta\gamma(\beta+\gamma)}{\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma};$$

$$Y = \frac{B}{b} \cdot \frac{mac(b+c)}{ab+ac+bc} = \frac{B}{\beta} \cdot \frac{\mu\alpha\gamma(\beta+\gamma)}{\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma};$$

$$Z = \frac{C}{c} \cdot \frac{mab(b+c)}{ab+ac+bc} = \frac{C}{\gamma} \cdot \frac{\mu\alpha\gamma(\beta+\gamma)}{\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma};$$

woraus man unmittelbar ersieht, dass hier die Hemmungen von a, b usw. genau so gross sind, wie sie sein würden, wenn die Vorstellungen einander uncomplicirt gegenüberständen; dasselbe Resultat wie in §. 79. 2. Die dritte und vierte Nr. dieses §'s findet, wie unmittelbar klar ist, auch auf drei Complexionen ihre Anwendung.

83.

Seien jetzt drei Complexionen $a + \alpha = A$, $b + \beta = B$, $c + \gamma = C$ gegeben, deren gleichartige Bestandtheile nach folgenden Schematen in beliebigen Gegensätzen stehen mögen:

$$\begin{array}{ccccc} & & c & & \\ & p & & n & \\ a & & m & & b \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccccc} & & \gamma & & \\ & \pi & & \nu & \\ \alpha & & \mu & & \beta \end{array}$$

Dasselbe Motiv, welches für einfache Vorstellungen der Annahme zum Grunde liegt, dass ihre Hemmungen bei ungleichen Gegensätzen nicht nur umgekehrt proportional den Intensitäten, sondern zugleich direct proportional den Summen der Gegensätze jeder der gegebenen Vorstellungen gegen alle übrigen seien (§. 40.), führt auch hier zur Anwendung desselben Princips.

Es wird hiernach also, wenn

$$X + Y + Z = S + \Sigma,$$

und N eine näher zu bestimmende Zahl ist,

$$X = \frac{m+p+\mu+\pi}{A} N(S+\Sigma); \qquad Y = \frac{m+n+\mu+\nu}{B} N(S+\Sigma);$$

$$Z = \frac{n+p+\nu+\pi}{C} N(S+\Sigma);$$

woraus, wenn zur Abkürzung

$$m+p+\mu+\pi = \varepsilon, \quad m+n+\mu+\nu = \varepsilon', \quad n+p+\nu+\pi = \varepsilon''$$

gesetzt wird,

$$\frac{1}{N} = \frac{\varepsilon}{A} + \frac{\varepsilon'}{B} + \frac{\varepsilon''}{C},$$

und daher

$$X = \frac{\varepsilon BC(S+\Sigma)}{\varepsilon'' AB + \varepsilon' AC + \varepsilon BC};$$

$$Y = \frac{\varepsilon' AC(S+\Sigma)}{\varepsilon'' AB + \varepsilon' AC + \varepsilon BC};$$

$$Z = \frac{\varepsilon'' AB(S+\Sigma)}{\varepsilon'' AB + \varepsilon' AC + \varepsilon BC}$$

folgt; Formeln, die denen für einfache Vorstellungen in §. 46. analog sind und aus denen die Hemmungen der einzelnen Bestandtheile wieder durch die Ausdrücke $x = \frac{a}{A}X$ usw. $\xi = \frac{\alpha}{A}X$ usw. bestimmt werden. Setzt man $\varepsilon = \varepsilon' = \varepsilon''$, so wird $m + \mu = n + \nu = p + \pi$ und die vorstehenden Formeln gehen in die des §. 81. über.

84.

Wir ziehen hieraus nach dem Vorgange von §. 78. zunächst einige Folgerungen über die Verhältnisse, in denen die Hemmungen der Bestandtheile zu einander stehen.

1. Allgemein verhält sich

$$x : y : z = \frac{\varepsilon a}{A^2} : \frac{\varepsilon' b}{B^2} : \frac{\varepsilon'' c}{C^2};$$

$$\xi : \eta : \zeta = \frac{\varepsilon \alpha}{A^2} : \frac{\varepsilon' \beta}{B^2} : \frac{\varepsilon'' \gamma}{C^2};$$

daher ist

$$\frac{x}{y} = \frac{\varepsilon a B^2}{\varepsilon' b A^2}; \quad \frac{x}{z} = \frac{\varepsilon a C^2}{\varepsilon'' c A^2};$$

$$\frac{\xi}{\eta} = \frac{\varepsilon \alpha B^2}{\varepsilon' \beta A^2}; \quad \frac{\xi}{\zeta} = \frac{\varepsilon \alpha C^2}{\varepsilon'' \gamma A^2}.$$

Ständen dieselben Vorstellungen einander uncomplicirt gegenüber, so würde sein

$$\frac{x}{y} = \frac{(m+p)b}{(m+n)a}; \quad \frac{x}{z} = \frac{(m+p)c}{(n+p)a};$$

$$\frac{\xi}{\eta} = \frac{(\mu+\pi)\beta}{(\mu+\nu)\alpha}; \quad \frac{\xi}{\zeta} = \frac{(\mu+\pi)\gamma}{(\nu+\pi)\alpha}.$$

Ist nun $m : n : p = \mu : \nu : \pi$, und daher

$$m+n : m+p : n+p = \mu+\nu : \mu+\pi : \nu+\pi,$$

so wird $\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = \frac{m+p}{m+n} = \frac{\mu+\pi}{\mu+\nu}$ und $\frac{\varepsilon}{\varepsilon''} = \frac{m+p}{n+p} = \frac{\mu+\pi}{\nu+\pi}$.

Daher sind dann, nämlich wenn die Gegensätze zwischen der einen Art der Bestandtheile (a, b, c) der drei Complexionen den Gegensätzen zwischen den gleichnamigen Bestandtheilen der andern Art (α, β, γ) proportional sind, die HVV. zwischen den gleichartigen Bestandthei-

len unter denselben Bedingungen, welche in §. 78. 1. für zwei Complexionen gefunden wurden, grösser, gleich oder kleiner als die HVV. derselben Vorstellungen, wenn sie einander uncomplicirt gegenüberstehen.

2. Allgemein ist auch hier, wie in §. 78. 2.,

$$\frac{x}{a} = \frac{\xi}{\alpha}; \quad \frac{y}{b} = \frac{\eta}{\beta}; \quad \frac{z}{c} = \frac{\zeta}{\gamma};$$

und zugleich, wenn r, s, t, ρ, σ, τ die Reste von a, b, c, α, β, γ bedeuten,

$$\frac{r}{a} = \frac{\rho}{\alpha}; \quad \frac{s}{b} = \frac{\sigma}{\beta}; \quad \frac{t}{c} = \frac{\tau}{\gamma};$$

daher sich die dort entwickelten Folgerungen hier wiederholen.

3. Endlich ist ebenso wie a. a. O., wenn $a:\alpha = b:\beta = c:\gamma$,
$x:\xi = y:\eta = z:\zeta = r:\rho = s:\sigma = t:\tau = a:\alpha$ usw.

85.

In Bezug auf die Grösse der Hemmungen sowohl der Complexionen als ihrer Bestandtheile ergeben sich weiter folgende specielle Resultate.

1. Sind zwar sowohl m, n, p als μ, ν, π unter einander ungleich, aber $m = \mu$, $n = \nu$, $p = \pi$, so wird

$$\varepsilon = 2(m+p) = 2(\mu+\pi); \quad \varepsilon' = 2(m+n) = 2(\mu+\nu);$$
$$\varepsilon'' = 2(n+p) = 2(\nu+\pi);$$

daher
$$X = \frac{(m+p)BC(S+\Sigma)}{(n+p)AB+(m+n)AC+(m+p)BC};$$
$$Y = \frac{(m+n)AC(S+\Sigma)}{(n+p)AB+(m+n)AC+(m+p)BC};$$
$$Z = \frac{(n+p)AB(S+\Sigma)}{(n+p)AB+(m+n)AC+(m+p)BC};$$

d. i. die Complexionen werden gehemmt, als ob sie einfache Vorstellungen wären, die in den Gegensätzen m, n, p ständen (vgl. §. 79. 3.).

2. Kommt zu der Voraussetzung der vorigen Nr. noch $a:b:c = \alpha:\beta:\gamma$, so wird $\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}$ und $\frac{\alpha}{A} = \frac{\beta}{B} = \frac{\gamma}{C}$. Setzt man nun

$$S = m_1 a + m_2 b + m_3 c,$$

wo einer der Coëfficienten m_1, m_2, m_3 Null, die beiden andern zweien von den Gegensätzen m, n, p gleich sein müssen, so ist auch

$$\Sigma = m_1\alpha + m_2\beta + m_3\gamma;$$

daher $$S + \Sigma = m_1 A + m_2 B + m_3 C.$$

Dann wird aber

$$\frac{a}{A}(S+\Sigma) = \frac{b}{B}(S+\Sigma) = \frac{c}{C}(S+\Sigma) = m_1 a + m_2 b + m_3 c = S;$$

$$\frac{\alpha}{A}(S+\Sigma) = \frac{\beta}{B}(S+\Sigma) = \frac{\gamma}{C}(S+\Sigma) = m_1\alpha + m_2\beta + m_3\gamma = \Sigma.$$

Hieraus folgt nun

$$x = \frac{a}{A}X = \frac{(m+p)\,bcS}{(n+p)\,ab + (m+n)\,ac + (m+p)\,bc};$$

$$y = \frac{b}{B}Y = \frac{(m+n)\,acS}{(n+p)\,ab + (m+n)\,ac + (m+p)\,bc};$$

$$z = \frac{c}{C}Z = \frac{(n+p)\,abS}{(n+p)\,ab + (m+n)\,ac + (m+p)\,bc};$$

$$\xi = \frac{\alpha}{A}X = \frac{(\mu+\pi)\,\beta\gamma\Sigma}{(\nu+\pi)\,\alpha\beta + (\mu+\nu)\,\alpha\gamma + (\mu+\pi)\,\beta\gamma};$$

$$\eta = \frac{\beta}{B}Y = \frac{(\mu+\nu)\,\alpha\gamma\Sigma}{(\nu+\pi)\,\alpha\beta + (\mu+\nu)\,\alpha\gamma + (\mu+\pi)\,\beta\gamma};$$

$$\zeta = \frac{\gamma}{C}Z = \frac{(\nu+\pi)\,\alpha\beta\Sigma}{(\nu+\pi)\,\alpha\beta + (\mu+\nu)\,\alpha\gamma + (\mu+\pi)\,\beta\gamma};$$

Ausdrücke, welche die Hemmungen anzeigen, die den Vorstellungen a, b usw. zukommen würden, wenn sie sich uncomplicirt gegenüberständen. Compliciren sich also drei ungleich entgegengesetzte Vorstellungen mit drei andern (ihnen disparaten), die der Reihe nach in denselben Gegensätzen stehen, und deren Intensitäten denen von jenen direct proportional sind, so werden sämmtliche Vorstellungen so gehemmt, wie es geschehen müsste, wenn sie nicht complicirt wären. Eine Erweiterung der in §. 79. 2. und §. 82. 2. enthaltenen analogen Sätze.

3. Ist $m:n:p = \mu:\nu:\pi$, so folgt, wie schon im vor. §. unter Nr. 1. bemerkt wurde,

$$\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = \frac{m+n}{m+p} = \frac{\mu+\nu}{\mu+\pi}; \quad \frac{\varepsilon''}{\varepsilon} = \frac{n+p}{m+p} = \frac{\nu+\pi}{\mu+\pi}.$$

Es nehmen daher auch dann die Formeln in §. 84. die Form an, die sie in Nr. 1. des jetzigen §'s haben. Es ist aber jetzt

$$S = m_1 a + m_2 b + m_3 c,$$

und $$\Sigma = \mu_1\alpha + \mu_2\beta + \mu_3\gamma$$

zu setzen, wo μ_1, μ_2, μ_3 nicht, wie in der vorstehenden Nr., mit m_1, m_2, m_3 zusammenfallen, sondern sich ebenso auf μ, ν, π, wie jene auf m, n, p beziehen. Ist nun eine von den drei Grössen m_1, m_2, m_3 (z. B. m_1) $\left\{\begin{matrix}\text{grösser}\\\text{kleiner}\end{matrix}\right\}$ als die ihr entsprechende (μ_1) unter den Grössen μ_1, μ_2, μ_3, so ist auch diejenige von den beiden andern, die nicht Null wird, (z. B. m_2) $\left\{\begin{matrix}\text{grösser}\\\text{kleiner}\end{matrix}\right\}$ als die *ihr* unter den Grössen μ_1, μ_2, μ_3 entsprechende (μ_2), was aus der angenommenen Proportionalität der Gegensätze folgt. Es wird daher dann beziehungsweise sein

$$S + \Sigma \lesseqgtr m_1 A + m_2 B + m_3 C;$$
$$\text{und} \quad \gtrless \mu_1 A + \mu_2 B + \mu_3 C.$$

Setzen wir nun überdies voraus; dass $a:b:c = \alpha:\beta:\gamma$ sei, so folgt

$$\frac{a}{A}(S+\Sigma) = \frac{b}{B}(S+\Sigma) = \frac{c}{C}(S+\Sigma) \lesseqgtr m_1 a + m_2 b + m_3 c;$$
$$\frac{\alpha}{A}(S+\Sigma) = \frac{\beta}{B}(S+\Sigma) = \frac{\gamma}{C}(S+\Sigma) \gtrless \mu_1 \alpha + \mu_2 \beta + \mu_3 \gamma.$$

Substituirt man nun in den Gleichungen $x = \frac{a}{A}X$ usw., $\xi = \frac{\alpha}{A}X$ usw. die Werthe von X, Y, Z in Nr. 1., und in diesen die vorstehenden Bestimmungen, so ergiebt sich, dass, wenn $m \gtrless \mu$, $n \gtrless \nu$, $p \gtrless \pi$, die Hemmungen x, y, z $\left\{\begin{matrix}\text{kleiner}\\\text{grösser}\end{matrix}\right\}$, dagegen die Hemmungen ξ, η, ζ $\left\{\begin{matrix}\text{grösser}\\\text{kleiner}\end{matrix}\right\}$ sein werden als die für sie in der vorigen Nr. gefundenen Werthe, d. i. als die Hemmungen, welche a, b, c, α, β, γ haben würden, wenn sie einander uncomplicirt gegenüberständen. C o m p l i c i r e n s i c h a l s o d r e i u n g l e i c h e n t g e g e n g e s e t z t e V o r s t e l l u n g e n m i t d r e i a n d e r n (i h n e n d i s p a r a t e n), d e r e n G e g e n s ä t z e s o w o h l a l s I n t e n s i t ä t e n d e n e n v o n j e n e n d e r R e i h e n a c h d i r e c t p r o p o r t i o n a l s i n d, s o w e r d e n d i e V o r s t e l l u n g e n d e r j e n i g e n v o n b e i d e n G a t t u n g e n, f ü r w e l c h e d i e G e g e n s ä t z e $\left\{\begin{matrix}\text{grösser}\\\text{kleiner}\end{matrix}\right\}$ s i n d a l s d i e e n t s p r e c h e n d e n d e r a n d e r n G a t t u n g, $\left\{\begin{matrix}\text{weniger}\\\text{mehr}\end{matrix}\right\}$, d i e V o r s t e l l u n g e n d e r a n d e r n G a t t u n g a b e r $\left\{\begin{matrix}\text{mehr}\\\text{weniger}\end{matrix}\right\}$ g e h e m m t, a l s g e s c h e h e n

würde, wenn alle Vorstellungen einander uncomplicirt gegenüberständen. Eine Erweiterung der Sätze in §. 79. 1. und §. 82. 1.

86.

Es mögen endlich noch die einfachsten Untersuchungen über die statischen Grenzwerthe vollkommener Complexionen folgen.

Dass keine Vorstellung, die mit einer andern complicirt ist, aus dem Bewusstsein verschwinden kann, ohne dass auch zugleich diese andre verschwinde, ist leicht einzusehen. Denn sei Z die Hemmung irgend einer Complexion $C = c + \gamma$, so ist $\frac{c}{C}Z$ die Hemmung des Bestandtheils c, $\frac{\gamma}{C}Z$ die Hemmung des Bestandtheils γ; daher $c(1 - \frac{Z}{C})$ der Rest von c, und $\gamma(1 - \frac{Z}{C})$ der Rest von γ, welche beide offenbar zugleich Null werden. Es handelt sich also hier überall nur um die statischen Grenzwerthe der Complexionen selbst.

1. Nehmen wir an, es seien drei Complexionen A, B, C gegeben, deren Bestandtheile durchgängig in vollem Gegensatz stehen, so wird, wenn $a > b > c$ und $\alpha > \beta > \gamma$, $S + \Sigma = B + C$. Dann gleichen die Formeln für X, Y, Z in §. 81 vollkommen denen für einfache Vorstellungen. Da nun auch $A > B > C$, so wird, wie in §. 56. (1),

$$\text{list. } C = B\sqrt{\frac{A}{A+B}}.$$

Tritt an die Stelle der Complexion C eine einfache Vorstellung c, so dass $\gamma = 0$ wird, so ändert dies in dem vorstehenden Ausdruck des statischen Grenzwerthes nichts. Sind also A, B stark genug, um eine vollkommene Complexion C aus dem Bewusstsein zu verdrängen, so vermögen sie dasselbe auch in Beziehung auf eine einfache Vorstellung c von derselben Intensität wie jene Complexion, und ebenso umgekehrt; natürlich Alles unter der Voraussetzung vollen Gegensatzes zwischen den gleichartigen Vorstellungen. Leicht findet sich auch, dass

$$B\sqrt{\frac{A}{A+B}} > b\sqrt{\frac{a}{a+b}};$$

d. i. der statische Grenzwerth für Complexionen ist bei durch-

aus vollem Gegensatze grösser als der statische Grenzwerth für einfache und voll entgegengesetzte Vorstellungen. Hieraus folgt, dass eine Vorstellung, die stark genug ist, um sich gegen zwei sowohl ihr als unter einander voll entgegengesetzte Vorstellungen noch im Bewusstsein zu halten, sobald diese sich mit hinlänglich starken, unter einander ebenfalls voll entgegengesetzten Vorstellungen compliciren, verschwinden muss, obgleich diese letzteren ihr disparat sind.

2. Sind von den mit a, b, c der Reihe nach complicirten Vorstellungen α, β, γ nur entweder α und γ oder β und γ voll entgegengesetzt, die übrigen zu einander disparat, so ist $\Sigma = \gamma$, daher $S + \Sigma = b + C$. Alsdann ergiebt sich, wenn man in §. 81. $Z = C$ setzt,

$$\text{list. } C = \sqrt{\frac{ABb}{A+B}}, \text{ was } < B\sqrt{\frac{A}{A+B}}.$$

Ist also c mit einer Vorstellung complicirt, die nur einer von den beiden mit a und b complicirten Vorstellungen voll entgegengesetzt ist, so dass diese letzteren sich gegen einander disparat verhalten, so ist der statische Grenzwerth der Complexion C kleiner, als er sein würde, wenn alle mit a, b, c complicirten Vorstellungen einander voll entgegengesetzt wären; es wird sich also C hier noch im Bewusstsein halten, indess es bei vollem Gegensatz der mit a, b, c complicirten Vorstellungen aus dem Bewusstsein weichen müsste.

3. Sind alle drei mit a, b, c complicirten Vorstellungen α, β, γ sowohl unter sich als mit jenen ersten disparat, so ist $\Sigma = 0$, daher $S + \Sigma = b + c = b - \gamma + C$. Alsdann folgt für $Z = C$

$$\text{list. } C = \sqrt{\frac{AB(b-\gamma)}{A+B}},$$

welcher Werth offenbar noch kleiner ist als der unter Nr. 2., für $\gamma = b$ Null und für $\gamma > b$ imaginär wird.

4. Seien unter übrigens gleichen Voraussetzungen wie in Nr. 1. $\alpha < \beta < \gamma$, so wird $S + \Sigma = b + c + \alpha + \beta = B + c + \alpha < B + C$. Daher dann für $Z = C$

$$C < \frac{AB(B+C)}{AB + AC + BC},$$

folglich

$$\text{list. } C < B\sqrt{\frac{A}{A+B}},$$

also kleiner als der Grenzwerth in Nr. 1., wie dies zu erwarten war, da jetzt A relativ kleiner ist als nach der dortigen Annahme.

5. Seien die Gegensätze sämmtlicher Vorstellungen sowohl der einen als der andern Gattung gleich, nämlich $= m$, so wird, wenn $a > b > c$ und $\alpha > \beta > \gamma$, $S + \Sigma = m(B + C)$, daher für $Z = C$ als Bedingungsgleichung des statischen Grenzwerths von C

$$(A + B) C^2 + (1 - m) ABC - mAB^2 = 0,$$

welche Gleichung der zu Anfange des §. 60. für einfache Vorstellungen erhaltenen vollkommen ähnlich ist und daher auch auf einen Ausdruck des statischen Grenzwerths von C führt, der dem dort unter (1) für c gefundenen völlig gleicht. Er bleibt derselbe, wenn $\gamma = 0$ wird und also C sich auf c reducirt.

6. Seien die Gegensätze von a, b, c, und ebenso die von α, β, γ nur unter sich gleich, jene $= m$, diese $= \mu$, so wird unter übrigens gleichen Voraussetzungen wie in Nr. 6.,

$$\text{wenn } m > \mu,\ S + \Sigma = m[b + c + \frac{\mu}{m}(\beta + \gamma)] < m(B + C);$$

$$\text{wenn } m < \mu,\ S + \Sigma = \mu[\frac{m}{\mu}(b + c) + \beta + \gamma] > \mu(B + C);$$

daher im ersten Falle

$$(A + B) C^2 + (1 - m) ABC - mAB^2 < 0,$$

im zweiten Falle

$$(A + B) C^2 + (1 - \mu) ABC - \mu AB^2 > 0;$$

woraus folgt, dass der statische Grenzwerth von C für $m > \mu$ kleiner, für $m < \mu$ grösser ist, als er sein würde, wenn die Gegensätze beider Gattungen von Vorstellungen durchaus gleich und beziehungsweise m, μ wären.

II. Vom Gleichgewicht unvollkommener Complexionen.

87.

Unter unvollkommenen Complexionen verstehen wir diejenigen Verbindungen disparater Vorstellungen, welche sich bilden, wenn zwei oder mehrere derselben nicht ungehemmt, sondern nur nach ihren Resten im Bewusstsein zusammentreffen. Da jedoch diese Reste nicht Theile der Vorstellungen bezeichnen (welche einfache Vorstellungen nicht haben können),

sondern die ganzen Vorstellungen im Zustande ihrer verminderten Klarheit, so kann die unvollkommene Complication auch nur bedeuten, dass die Vorstellungen in schwächerem Grade als bei vollkommener Complication verbunden sind. Es fragt sich nun, welche Verstärkung jeder von zwei unvollkommen complicirten Vorstellungen aus dieser gegenseitigen Verbindung in Bezug auf die Hemmung durch entgegengesetzte Vorstellungen erwächst.

1. Sei eine ungehemmte Vorstellung a mit einer bis auf den Rest ρ gehemmten disparaten Vorstellung α unvollkommen complicirt, so lässt sich die Stärke der daraus hervorgehenden Complexion nicht durch einen einzigen Ausdruck angeben, sondern es ist zu unterscheiden, ob von der Verstärkung des a durch α oder des α durch a die Rede ist. Die erstere ist offenbar ρ, und wenn daher a eine entgegengesetzte Vorstellung b gegenübersteht, so ist die zwischen beiden sich bildende HS. S nicht mehr nach dem Verhältniss $\frac{1}{a}:\frac{1}{b}$, sondern nach dem Verhältniss $\frac{1}{a+\rho}:\frac{1}{b}$ zwischen der unvollkommenen Complexion von a und α einerseits und b andrerseits zu vertheilen. Hat dagegen α eine Hemmung zu tragen, indem ein entgegengesetztes β gleichzeitig gegeben ist, so ist zu beachten, dass die Verstärkung $= a$ unmittelbar nur dem Reste ρ von α, d. h. α selbst nur im Grade $\frac{\rho}{\alpha}$, zukommt, so dass die Verstärkung von α nur $\frac{\rho a}{\alpha}$ beträgt, welcher Werth, wenn $\rho = \alpha$, in a übergeht. Es wird also, wenn α durch eine entgegengesetzte Vorstellung, β, eine Hemmung erleidet, sich eine unvollkommene Complexion von der Stärke $\alpha + \frac{\rho a}{\alpha}$ bilden und dieser umgekehrt proportional das durch a verstärkte α an der HS. Theil haben, und zwar so, dass dann weiter die Hemmung der Complexion, wie bei den vollkommenen Complexionen, sich zwischen α und a nach dem directen Verhältniss der Bestandtheile, also $\alpha:\frac{\rho a}{\alpha}$, vertheilt.

2. Seien a und α beide nach ihren Resten r und ρ mit einander complicirt. Hier wird unmittelbar nicht a, sondern sein Rest r durch den Rest ρ von α verstärkt, d. h. a selbst

erhält ρ nur im Grade $\frac{r}{a}$ zur Verstärkung. Es ist demnach die unvollkommene Complexion von a mit α, wenn es sich um die Verstärkung von a handelt $= a + \frac{r\rho}{a}$. In ganz ähnlicher Weise ist aber die unvollkommene Complexion von α mit a, bei welcher jenes durch dieses verstärkt wird, $= \alpha + \frac{r\rho}{\alpha}$. Beide Ausdrücke gehen, wie es sein muss, für $r = a$, $\rho = \alpha$ in $a + \alpha$ über, so dass die vollkommenen Complexionen als ein besonderer Fall der unvollkommenen betrachtet werden können. Ist nur $r = a$, so wird $a + \frac{r\rho}{a} = a + \rho$ und $\alpha + \frac{r\rho}{\alpha} = \alpha + \frac{\rho a}{\alpha}$, wie in Nr. 1., welche also in der vorstehenden erweiterten Betrachtung als besondrer Fall enthalten ist.

Nach diesen Vorbegriffen lösen wir nun einige der einfachsten das Gleichgewicht unvollkommener Complexionen betreffenden Aufgaben.

88.

Seien a und α nach den Resten r und ρ complicirt und stehe a eine im Grade m entgegengesetzte einfache Vorstellung b gegenüber; man sucht für die drei Vorstellungen a, α, b die Hemmungen im Gleichgewicht.

Seien wie früher x, ξ, y die gesuchten Hemmungen und $X = x + \xi$ die Hemmung der Complexion von a mit α. Diese wird, nach dem vorigen §., jetzt $= a + \frac{r\rho}{a}$ sein, was zur Abkürzung $= A_1$ gesetzt werde. Ist nun überdies die HS. zwischen a und $b = S$, also, wenn $a > b$, $S = mb$, so wird, wenn N, wie früher, eine Proportionalzahl,

$$X = \frac{NS}{A_1}; \qquad y = \frac{NS}{b};$$

$$X + y = S; \text{ folglich } \frac{1}{N} = \frac{1}{A_1} + \frac{1}{b} = \frac{A_1 + b}{A_1 b};$$

daher
$$X = \frac{bS}{A_1 + b}; \qquad y = \frac{A_1 S}{A_1 + b};$$

folglich
$$x = \frac{abS}{A_1(A_1 + b)}; \quad \xi = \frac{(A_1 - a)bS}{A_1(A_1 + b)}.$$

Vergleicht man diese Werthe von x und y mit den Hemmungen $\frac{bS}{a + b}$, $\frac{aS}{a + b}$, die a und b erleiden, wenn keine von beiden

Vorstellungen mit einer andern complicirt ist, so übersieht man leicht, dass a durch die Complication mit α gewinnt, b dagegen dabei verliert, und dass dieser Verlust kleiner als jener Gewinn ist.

In Vergleichung mit den Hemmungen für vollkommene Complication von a mit α (§. 76.) zeigt sich aber, da $A_1 < A$, dass bei unvollkommener Complication von a mit α die Hemmung von a stärker, die von α und von b schwächer ist als bei vollkommener Complication von a mit α; wie dies nicht anders zu erwarten war.

Sei zur speciellen Erläuterung der Formeln durch Zahlen

1. $a = 3$, $\alpha = 2$, $b = 1$, $m = 1$, $r = 1$, $\rho = 1$; folglich $S = 1$, $A_1 = \frac{10}{3}$; so findet sich

$$x = 0{,}208; \quad \xi = 0{,}023; \quad y = 0{,}769.$$

Wären a und α vollkommen complicirt, so würde nach §. 76.

$$x = 0{,}1; \quad \xi = 0{,}067; \quad y = 0{,}833.$$

Es ist also bei unvollkommener Complication von a mit α die Hemmung von a stärker, die von α und b schwächer als bei vollkommener Complication.

Für die einfachen Vorstellungen a, b würde

$$x = 0{,}25; \quad y = 0{,}75.$$

Es gewinnt also a durch seine unvollkommene Complication mit α... 0,042, und es verliert dabei b... 0,019. Es ist also dieser Verlust kleiner als jener Gewinn.

2. Sei $a = 3$, $\alpha = 2$, $b = 10$, $m = 1$, $r = 1$, $\rho = \frac{7}{4}$; folglich $S = 3$, $A_1 = \frac{43}{12}$; so ergiebt sich

$$x = 1{,}849; \quad \xi = 0{,}359; \quad y = 0{,}791.$$

Wären a und α vollkommen complicirt, so wäre

$$x = 1{,}2; \quad \xi = 0{,}8; \quad y = 1;$$

wo dieselben Bemerkungen wie beim ersten Beispiel gelten.

Treffen a und b ohne Complication mit andern Vorstellungen zusammen, so ist

$$x = 2{,}308; \quad y = 0{,}692.$$

Es gewinnt also a durch die unvollkommene Complication mit α... 0,459, was mehr beträgt als der Verlust, den dabei b erleidet, welcher $= 0{,}099$ ist.

89.

Seien gegeben zwei unvollkommene Complexionen, die eine zwischen a und α nach den Resten r und ρ, die andre zwischen b und β nach den Resten s und σ; der Gegensatz von a zu b sei m, der von α zu β... μ; man sucht die Hemmungen x, y, ξ, η dieser vier Vorstellungen im Gleichgewicht.

Es ist hier die Hemmung der Complexion von a mit α durch b zu unterscheiden von derjenigen Hemmung, welche von β herrührt. Beide sind unabhängig von einander, da nur b und a, β und α einander entgegengesetzt sind. Die erstere dieser Hemmungen sei $= X_1$, die zweite $= X_2$. Ebenso sei Y_1 die Hemmung der Complexion von b mit β, sofern sie von a herrührt, und Y_2 die Hemmung der Complexion durch das dem β entgegengesetzte α. Ferner verstärkt sich a gegen die von b ausgehende Hemmung um $\frac{r\rho}{a}$, α gegen die von β ausgehende Hemmung um $\frac{r\rho}{\alpha}$, ebenso b gegen a um $\frac{s\sigma}{b}$, β gegen α um $\frac{s\sigma}{\beta}$. Setzen wir nun

$$a + \frac{r\rho}{a} = A_1, \quad \alpha + \frac{r\rho}{\alpha} = A_2, \quad b + \frac{s\sigma}{b} = B_1, \quad \beta + \frac{s\sigma}{\beta} = B_2,$$

so nehmen a und α zusammen an der zwischen a und b sich bildenden HS. im Verhältniss $\frac{1}{A_1}$, dagegen an der HS. zwischen α und β im Verhältniss $\frac{1}{A_2}$ Antheil; ebenso b und β zusammen an der HS. zwischen b und a im Verhältniss $\frac{1}{B_1}$ und an der HS. zwischen β und α im Verhältniss $\frac{1}{B_2}$. Ist nun S die HS. zwischen a und b, Σ die zwischen α und β, und sind N_1, N_2 näher zu bestimmende Proportionalzahlen, so ist

$$X_1 = \frac{N_1 S}{A_1}; \quad Y_1 = \frac{N_1 S}{B_1}; \quad X_1 + Y_1 = S;$$

folglich $$\frac{1}{N_1} = \frac{1}{A_1} + \frac{1}{B_1} = \frac{A_1 + B_1}{A_1 B_1};$$

daher $$X_1 = \frac{B_1 S}{A_1 + B_1}; \quad Y_1 = \frac{A_1 S}{A_1 + B_1}.$$

Ebenso $$X_2 = \frac{N_2 S}{A_2}; \quad Y_2 = \frac{N_2 S}{B_2}; \quad X_2 + Y_2 = \Sigma;$$

folglich $$\frac{1}{N_2} = \frac{1}{A_2} + \frac{1}{B_2} = \frac{A_2 + B_2}{A_2 B_2};$$

daher $X_2 = \frac{B_2 \Sigma}{A_2 + B_2}$; $Y_2 = \frac{A_2 \Sigma}{A_2 + B_2}$.

Aber die Hemmungen X_1, X_2 sind von a und α, ebenso die Hemmungen Y_1, Y_2 von b und β gemeinschaftlich zu tragen. Der Antheil einer jeden dieser Vorstellungen an jenen Hemmungen ist direct proportional dem Antheil, den sie an der Intensität der in Betracht kommenden Complexion hat. Nun ist X_1 die Hemmung, die auf A_1 kommt; es wird sich daher X_1 auf a und α nach dem Verhältniss $a : \frac{r\rho}{a}$ oder $a : A_1 - a$ vertheilen. Ebenso ist X_2 die Hemmung, die auf A_2 kommt; es wird sich also X_2 auf a und α nach dem Verhältniss $\frac{r\rho}{\alpha} : \alpha$ oder $A_2 - \alpha : \alpha$ vertheilen. In gleicher Weise vertheilt sich Y_1 auf b und β nach dem Verhältniss $b : \frac{s\sigma}{b}$ oder $b : B_1 - b$ und Y_2 auf b und β nach dem Verhältniss $\frac{s\sigma}{\beta} : \beta$ oder $B_2 - \beta : \beta$. Es wird daher endlich

$$x = \frac{aX_1}{A_1} + \frac{(A_2 - \alpha) X_2}{A_2} = \frac{aB_1 S}{A_1 (A_1 + B_1)} + \frac{(A_2 - \alpha) B_2 \Sigma}{A_2 (A_2 + B_2)};$$

$$\xi = \frac{(A_1 - a) X_1}{A_1} + \frac{\alpha X_2}{A_2} = \frac{(A_1 - a) B_1 S}{A_1 (A_1 + B_1)} + \frac{\alpha B_2 \Sigma}{A_2 (A_2 + B_2)};$$

$$y = \frac{bY_1}{B_1} + \frac{(B_2 - \beta) Y_2}{B_2} = \frac{bA_1 S}{B_1 (A_1 + B_1)} + \frac{(B_2 - \beta) A_2 \Sigma}{B_2 (A_2 + B_2)};$$

$$\eta = \frac{(B_1 - b) Y_1}{B_1} + \frac{\beta Y_2}{B_2} = \frac{(B_1 - b) A_1 S}{B_1 (A_1 + B_1)} + \frac{\beta A_2 \Sigma}{B_2 (A_2 + B_2)};$$

Formeln, die, wenn die unvollkommenen Complexionen in vollkommene übergehen, also $A_1 = A_2 = A$, $B_1 = B_2 = B$ wird, sich in die des §. 77. verwandeln, und, wenn die sämmtlichen Reste verschwinden, mithin $A_1 = a$, $A_2 = \alpha$, $B_1 = b$, $B_2 = \beta$ wird, in die Hemmungswerthe der uncomplicirt einander gegenüberstehenden entgegengesetzten Vorstellungen a und b, α und β übergehen. Hieraus erhellt, dass unvollkommen complicirte Vorstellungen, je nach der Grösse der Reste, durch deren Vermittelung sie complicirt sind, alle möglichen Hemmungen haben können, die zwischen Grenzen liegen, welche durch die Hemmungen einfacher und vollkommen complicirter Vorstellungen bestimmt werden.

Wir ziehen aus diesen Formeln noch einige specielle Folgerungen.

1. Ist $\mu = 0$, d. h. sind α und β nicht entgegengesetzt, also entweder qualitativ gleich oder disparat, so wird $\Sigma = 0$, folglich

$$x = \frac{aB_1 S}{A_1(A_1+B_1)};\ \xi = \frac{(A_1-a)B_1 S}{A_1(A_1+B_1)};\ y = \frac{bA_1 S}{B_1(A_1+B_1)};\ \eta = \frac{(B_1-b)A_1 S}{B_1(A_1+B_1)}.$$

Dann ist

$$\frac{x}{y} = \frac{aB_1^2}{bA_1^2};\ \frac{\xi}{\eta} = \frac{(A_1-a)B_1^2}{(B_1-b)A_1^2};$$

in ähnlicher Weise wie bei vollkommenen Complexionen (§. 78. 1.).

2. Ist überdies $\beta = 0$, also nur a mit α unvollkommen complicirt, so ist $\Sigma = 0$ und $\sigma = 0$, daher $B_1 = B_2 = b$. Dann gehen die Formeln, wie es sein muss, in die des §. 88. über.

3. Ist $s = 0$ oder $\sigma = 0$, ohne dass $\beta = 0$, d. h. sind b und β nicht mit einander complicirt, so wird $B_1 = b$ und $B_2 = \beta$, daher

$$x = \frac{abS}{A_1(A_1+b)} + \frac{(A_2-\alpha)\beta\Sigma}{A_2(A_2+\beta)};$$

$$\xi = \frac{(A_1-a)bS}{A_1(A_1+b)} + \frac{\alpha\beta\Sigma}{A_2(A_2+\beta)};$$

$$y = \frac{A_1 S}{A_1+b};\ \eta = \frac{A_2\Sigma}{A_2+\beta}.$$

90.

Im vorigen §. wurde bemerkt, dass die unvollkommenen Complexionen einen stetigen Uebergang von den vollkommenen zu den uncomplicirten Vorstellungen bilden, daher sie beide als besondre Fälle unter sich begreifen. Dies tritt noch deutlicher hervor, wenn wir den Begriff des Grades der Complication einführen. Da nämlich in den unvollkommenen Complexionen $a + \frac{r\rho}{a}$, $\alpha + \frac{r\rho}{\alpha}$, $\frac{r\rho}{a} = \frac{r\rho}{a\alpha}\alpha$, $\frac{r\rho}{\alpha} = \frac{r\rho}{a\alpha}a$ ist, so drückt der Bruch $\frac{r\rho}{a\alpha}$ den Grad aus, in welchem α mit a und a mit α complicirt ist. Er erreicht sein Maximum $= 1$, wenn $r = a$, $\rho = \alpha$, also bei vollkommenen Complexionen, und sein Minimum $= 0$, wenn $r = 0$ oder $\rho = 0$, also bei uncomplicirten Vorstellungen.

Es ist beachtenswerth, dass dieser Grad und damit die Innigkeit der Verbindung von zwei Vorstellungen zunehmen kann, wenn sie mit einer der einen von beiden entgegengesetzten Vorstellung von hinlänglich schwacher Intensität oder hinlänglich schwachem Gegensatze zusammentreffen und sich ins Gleichgewicht setzen. Offenbar wird dies nämlich der Fall sein, wenn in §. 88. die Reste von a und α im Gleichgewicht mit b, welche durch r' und ρ' bezeichnet werden mögen, so beschaffen sind, dass $r'\rho' > r\rho$. Dies wird stattfinden, wenn

$$[a - \frac{abS}{A_1(A_1+b)}]\,[\alpha - \frac{(A_1-a)bS}{A_1(A_1+b)}] > r\rho,$$

welcher Bedingung, da $a\alpha > r\rho$, auf unzählig vielfache Weise durch hinlänglich kleine Werthe von b oder S, folglich m, Genüge geleistet werden kann.

In dem ersten Beispiel des §. 88. war $a = 3$, $r = 1$, $\alpha = 2$, $\rho = 1$, $b = 1$, $m = 1$; es ward gefunden $x = 0{,}208$; $\xi = 0{,}023$. Es ist also $r' = a - x = 2{,}792$; $\rho' = \alpha - \xi = 1{,}977$; daher

$$r'\rho' = 5{,}520 > r\rho = 1.$$

Der Grad der Complication von a und α war vor der Hemmung durch $b \ldots \frac{r\rho}{a\alpha} = \frac{1}{6} = 0{,}167$; er ist nach der Hemmung $\frac{r'\rho'}{a\alpha} = 0{,}920$, also $5\frac{1}{2}$mal so gross als zuvor.

Im zweiten Beispiel desselben §'s war $a = 3$, $r = 1$, $\alpha = 2$, $\rho = \frac{7}{4}$, $b = 10$ und $m = 1$, und ward gefunden $x = 1{,}849$; $\xi = 0{,}359$. Es ist also $r' = a - x = 1{,}151$ und $\rho' = \alpha - \xi = 1{,}641$; daher

$$r'\rho' = 1{,}889 > r\rho = 1{,}75.$$

Vor der Hemmung durch b war $\frac{r\rho}{a\alpha} = 0{,}292$, nach der Hemmung ist $\frac{r'\rho'}{a\alpha} = 0{,}315$.

Wäre dagegen bei sonst unveränderten Werthen $b = 12$, so würde sich ergeben $x = 1{,}934$; $\xi = 0{,}376$; daher $r' = 1{,}066$, $\rho' = 1{,}624$; folglich

$$r'\rho' = 1{,}731 < r\rho = 1{,}75;$$

woraus $\frac{r\rho}{a\alpha} = 0{,}291$; $\frac{r'\rho'}{a\alpha} = 0{,}288$. Dieses Resultat darf jedoch nicht so ausgelegt werden, als habe die Innigkeit der Verbin-

dung unter diesen Umständen eine Abnahme erlitten. Vielmehr dauert die frühere stärkere Complication fort, sie kann nur nicht stärker werden, da $r'\rho' < r\rho$. Denn es ist in der Psychologie ein allgemeiner Grundsatz, dass keine Verbindung, welche Vorstellungen eingegangen sind, wieder auflösbar ist, so wenig als eine Vorstellung, die jemals im Bewusstsein war, ganz verloren gehen kann. Von den verkehrtesten, widersinnigsten Verknüpfungen von Vorstellungen muss, auch nachdem ihre Unangemessenheit erkannt ist, doch noch eine Erinnerung möglich sein, wenn es auch dazu oft besonders begünstigender Umstände bedarf. Eine solche wäre aber unmöglich, wenn sich solche Verknüpfungen nach der Erkenntniss ihrer Unzulässigkeit auflösten. Die unrichtigen Verbindungen bestehen neben den richtigen fort, nur werden die letzteren an Zahl und Stärke die überwiegenden, so dass durch sie die Vorstellungen, welche auf objectiv ungültige Weise (z. B. durch ein fehlerhaftes Urtheil) sich mit einer Vorstellung verknüpft haben, allmälig zurückgedrängt, verdunkelt werden.

91.

Wenn eine vollkommene oder unvollkommene Complexion einer einfachen, einem ihrer Bestandtheile entgegengesetzten Vorstellung gegenübersteht, so wird sich, was wir bisher unbeachtet liessen, auch diese letztere mit dem ihr disparaten Bestandtheil der Complexion verbinden und dieser sonach sich mit zwei entgegengesetzten Vorstellungen compliciren. Nehmen wir an, dass die Vorstellungen, um sich zu compliciren, erst zur Ruhe, d. h. dem Zustand des Gleichgewichts wenigstens nahe gekommen sein müssen, so wird der Grad der neuen Complication aus den Resten der Vorstellungen im Gleichgewicht zu bestimmen sein und nach §. 88. ausgedrückt werden durch

$$\frac{(b-y)(\alpha-\xi)}{b\alpha} = [1-\frac{A_1 S}{b(A_1+b)}]\ [1-\frac{(A_1-a)bS}{\alpha A_1(A_1+b)}].$$

Dieser Grad wird $\left\{\begin{matrix}\text{grösser}\\ \text{kleiner}\end{matrix}\right\}$ sein als der der ältern Complexion von a mit α, welcher

$$= \frac{(a-x)(\alpha-\xi)}{a\alpha} = [1-\frac{bS}{A_1(A_1+b)}]\ [1-\frac{(A_1-a)bS}{\alpha A_1(A_1+b)}],$$

je nachdem $A_1 \lessgtr b$, d. i. $a^2 - ab + r\rho \lessgtr 0$. Ist also $a > b$, so ist der Grad der Complication von b mit α immer kleiner als der von a mit α. Ist aber $b > a$ und zugleich $b - a > \frac{r\rho}{a}$, so ist er grösser. Im ersten Beispiel des §. 88., wo $a = 3$, $b = 1$, ergiebt sich $a - x = 2{,}792$, $b - y = 0{,}231$; $\alpha - \xi = 1{,}977$; daher ist, wie schon im vorigen §. gefunden wurde, $\frac{(a-x)(\alpha-\xi)}{a\alpha} = 0{,}920$; zugleich ergiebt sich $\frac{(b-y)(\alpha-\xi)}{b\alpha} = 0{,}233$, also kleiner.

Im zweiten Beispiel dagegen, wo $a = 3$, $b = 10$, $r = 1$, $\rho = \frac{7}{4}$, also $b - a = 7 > \frac{r\rho}{a} = \frac{7}{12}$, wird, da $a - x = 1{,}151$, $b - y = 9{,}209$, $\alpha - \xi = 1{,}641$, $\frac{(a-x)(\alpha-\xi)}{a\alpha} = 0{,}315$, aber $\frac{(b-y)(\alpha-\xi)}{b\alpha} = 0{,}755$, also grösser.

Es versteht sich von selbst, dass auch, wenn zwei oder mehrere Complexionen, z. B. wie in §. 89. von a und α, b und β, sich ins Gleichgewicht setzen, neue Complexionen entstehen, also in diesem Falle α mit b und β mit a sich complicirt, und diese neuen Complexionen bald einen grössern bald einen kleinern Grad der Innigkeit der Verbindung haben werden als die ältern.

Die Rechnung für drei und mehrere unvollkommene Complexionen lässt sich nach denselben Grundsätzen wie für zwei ausführen; nur werden, der Natur der Sache nach, die Formeln weitläufiger. Da unvollkommene Complexionen ohne Zweifel diejenigen Verbindungsformen disparater Vorstellungen sind, die in der Wirklichkeit am häufigsten vorkommen, so wird die mathematische Psychologie in ihrer künftigen weiteren Entwickelung ihnen allerdings eine tiefer eingehende Untersuchung widmen müssen, deren wir uns aber für jetzt noch entheben zu dürfen glauben.

III. Vom Gleichgewicht der Verschmelzungen.

92.

Wenn zwei einfache und entgegengesetzte Vorstellungen a, b sich mit einander ins Gleichgewicht gesetzt haben, so dass von ihnen nur noch die Reste r, s im Bewusstsein sind, so vereinigen sie sich zu einer zusammengesetzten Vorstellung, welche die Verschmelzung der beiden einfachen nach ihren Resten r, s heissen mag. Kommt nun eine dritte, beiden entgegengesetzte Vorstellung c hinzu, so muss sich die Hemmung von beiden nothwendigerweise vermehren, aber sie leisten sich gegen diese ihnen auferlegte neue Hemmung gegenseitig einen Beistand, der die Verschmelzungshülfe heissen soll, wodurch ihre Intensitäten relativ verstärkt und gegen die Nöthigung zur Hemmung weniger nachgiebig werden. Die Bestimmung der Grösse dieser Verschmelzungshülfen wird auf dieselbe Weise wie die der Hülfen durch Complication disparater Vorstellungen (§. 87.) erhalten. Nicht a selbst, sondern nur sein Rest r wird unmittelbar durch den Rest s von b verstärkt, a selbst erhält daher diese Verstärkung nur im Grade $\frac{r}{a}$, d. i. die Verschmelzungshülfe, welche a von b erhält, ist $= \frac{rs}{a}$, und das durch die Verschmelzung mit b verstärkte a hat nun die Intensität $a + \frac{rs}{a}$. Ebenso ist die Verschmelzungshülfe, welche b von a erhält, $\frac{s}{b} . r = \frac{rs}{b}$, daher hat b hierdurch verstärkt die Intensität $b + \frac{rs}{b}$. Diese Grössen $a + \frac{rs}{a}$, $b + \frac{rs}{b}$ sind jedoch nur Verhältnisszahlen, denn die Summe der Intensitäten beider Vorstellungen bleibt unverändert $a + b$. In Vergleichung mit den unvollkommenen Complexionen geben die Verschmelzungen den beachtungswerthen Unterschied, dass jede einer von beiden entgegengesetzte Vorstellung auch der andern entgegengesetzt ist, beide also zugleich einen unmittelbaren Angriff erleiden, indess bei den Complexionen, wegen der Ungleichartigkeit der Bestandtheile, dies immer nur von einem derselben gilt. Es kommen daher beide Verschmelzungshülfen immer zugleich in Anwendung, und jede Vorstellung hat durch

ihre Verschmelzung mit der andern auch den gegen diese unmittelbar gerichteten Angriff mit zu übertragen.

93.

Seien jetzt die Hemmungen der drei Vorstellungen a, b, c unter der Voraussetzung zu bestimmen, dass a, b nach den Resten r, s mit einander verschmolzen sind und c ohne Verbindung ihnen gegenübertritt, wobei α, β, γ, wie in §. 46., die Summen der auf a, b, c der Reihe nach sich beziehenden Gegensätze bedeuten mögen.

Zum Unterschied von den Hemmungen x, y, welche die Reste r, s geben, sollen die gesuchten Hemmungen der drei Vorstellungen durch x', y', z' bezeichnet werden. Da a theils unmittelbar durch die Wirkung der ihm entgegengesetzten Vorstellungen, theils mittelbar durch die Hülfe leidet, die es b leisten muss, so zerfällt die Hemmung x' von a in zwei Theile, die sich auf diese unmittelbare und mittelbare Ursache der Hemmung beziehen. Die Hemmung, die a unmittelbar erleidet, sei $= x_1$, die durch die Hülfe geforderte $= x_2$, so ist

$$x' = x_1 + x_2.$$

In gleichem Sinne sei

$$y' = y_1 + y_2,$$

wo also y_1 die Hemmung, die b durch die unmittelbare Einwirkung des Entgegengesetzten, y_2 diejenige, welche es durch seine a geleistete Hülfe erleidet.

Nach den gegebenen Erklärungen wird nun in den Verschmelzungen $a + \frac{rs}{a} = A$, $b + \frac{rs}{b} = B$ auf a als Theil von A die Hemmung x_1, auf b als Theil von B die Hemmung y_1, ferner x_2 auf $\frac{rs}{b}$, die Hülfe, die b von a erhält, und y_2 auf $\frac{rs}{a}$, die Hülfe, die a von b erhält, kommen. Setzen wir weiter zur Abkürzung

$$x_1 + y_2 = X, \qquad y_1 + x_2 = Y,$$

so sind X, Y die Hemmungen, die bezüglich auf a mit seiner Verschmelzungshülfe und b mit der seinigen kommen. Diese Totalhemmungen werden sich aber, wie die der Complexionen, auf die beiden Bestandtheile der Verschmelzung nach dem directen Verhältniss derselben vertheilen, da jede Vorstellung

mit ihrer Hülfe als ein Ganzes zu betrachten ist, dessen gleiche Theile gleichmässig leiden. Daher wird sein

$$x_1 = \frac{a}{A}X;\quad y_2 = \frac{rs}{aA}X;\quad y_1 = \frac{b}{B}Y;\quad x_2 = \frac{rs}{bB}Y.$$

Endlich verhält sich

$$X : Y : z' = \frac{\alpha}{A} : \frac{\beta}{B} : \frac{\gamma}{c}.$$

Denn da A und B nur als verstärkte Intensitäten der Vorstellungen a, b zu betrachten sind, so werden nach den früher aufgestellten Grundsätzen ihre Hemmungen einerseits umgekehrt proportional diesen Intensitäten, andrerseits direct proportional den Summen der sich auf sie beziehenden Gegensätze sein. Hieraus folgt nun, da überdies offenbar

$$X + Y + z' = S,$$

$$X = \frac{\alpha BcS}{\gamma AB + \beta Ac + \alpha Bc};\quad Y = \frac{\beta AcS}{\gamma AB + \beta Ac + \alpha Bc};$$

$$z' = \frac{\gamma ABS}{\gamma AB + \beta Ac + \alpha Bc}.$$

Aus den beiden ersten dieser Gleichungen ergiebt sich endlich nach den vorangegangenen Bestimmungen von x_1, x_2, y_1, y_2

$$x' = x_1 + x_2 = \frac{(\alpha abB^2 + \beta rsA^2)cS}{bAB(\gamma AB + \beta Ac + \alpha Bc)};$$

$$y' = y_1 + y_2 = \frac{(\beta abA^2 + \alpha rsB^2)cS}{aAB(\gamma AB + \beta Ac + \alpha Bc)}.$$

Sei z. B. $a = 2$, $b = 1$, $c = 1$, $m = n = p = 1$, so ist für das Gleichgewicht zwischen a und $b \ldots r = \frac{5}{3}$, $s = \frac{1}{3}$; daher wird $A = \frac{41}{18} = 2{,}278$, $B = \frac{14}{9} = 1{,}556$. Ueberdies ist $S = 2$, $\alpha = \beta = \gamma = 2$. Hieraus folgt

$$x' = 0{,}591;\quad y' = 0{,}448;\quad z' = 0{,}961;$$

ohne Verschmelzung von a und b würde sein

$$x = 0{,}286;\quad y = z = 0{,}857.$$

Es gewinnt also hier die schwächere, verliert die stärkere der verschmolzenen Vorstellungen durch ihre Verbindung; ebenso verliert dabei die unverschmolzene.

94.

Wir ziehen aus den vorstehenden Formeln noch einige Folgerungen.

1. Setzt man $r = 0$ und $s = 0$, so wird auch $A = a$ und $B = b$. Alsdann gehen die Formeln des vorigen §'s für x', y', z' in die für drei einfache unverschmolzene Vorstellungen über, wie sie oben in §. 46. bestimmt worden sind, und wie es sein muss, da alsdann die Voraussetzung der Verschmelzung aufhört gültig zu sein.

2. Wird $\gamma = 0$ gesetzt, so bedeutet dies, dass die dritte Vorstellung c weder gegen a noch b im Gegensatz steht. Sie ist also, da es keine Vorstellung giebt, die zwei entgegengesetzten zugleich qualitativ gleich sein kann, als gar nicht vorhanden zu betrachten. Alsdann aber leisten sich auch a und b keine Verschmelzungshülfen. Es ist daher zugleich $rs = 0$ zu setzen, wodurch auch $A = a$, $B = b$ wird und nun die Formeln für x' und y' in die für zwei einfache unverschmolzene Vorstellungen übergehen.

3. Vergleicht man die Werthe von x', y', z' mit denen von x, y, z in §. 46., so findet sich leicht, dass immer $z' > z$, daher auch $x' + y' < x + y$, also die isolirte Vorstellung stärker gehemmt wird, wenn ihr zwei verschmolzene, als wenn ihr zwei unverschmolzene Vorstellungen gegenüberstehen, und die Summe der Hemmungen dieser Vorstellungen geringer ist, wenn sie verschmolzen, als wenn sie unverschmolzen sind.

4. Die Hemmungen von a und b, x', y' werden gleich, wenn

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{A^2 a (b^3 - ars)}{B^2 b (a^3 - brs)}.$$

Für $a = b$ fordert dies $\alpha = \beta$, also gleiche Gegensätze von c gegen a und b.

5. Setzt man $z' = c$, so erhält man den statischen Grenzwerth von c. Bleiben wir bei dem einfachen Falle stehen, wo $S = mb + c$ (vgl. §. 66.), so ist $\alpha = 1 + m$, $\beta = m + n$, $\gamma = 1 + n$, und es ergiebt sich

$$\text{list. } c = \sqrt{\frac{m(1+n)ABb}{(m+n)A + (1+m)B}};$$

eine Formel, die, wenn $A = a$, $B = b$ gesetzt wird, in die §. 66. (1) für unverschmolzene Vorstellungen gefundene

$$\text{list. } c = b\sqrt{\frac{m(1+n)a}{(m+n)a + (1+m)b}}$$

übergeht, welcher Werth kleiner als der vorhergehende ist. Die zwei verschmolzenen Vorstellungen a, b können daher unter diesen Umständen eine stärkere Vorstellung aus dem Bewusstsein verdrängen, als dies möglich wäre, wenn sie dieser unverschmolzen gegenüberständen.

6. Es lässt sich zeigen, dass der gefundene statische Grenzwerth von c sogar grösser als b sein kann. Führt man nämlich in dem Ausdruck für list. c zur Abkürzung wieder α, β, γ und $A = \frac{a^2+rs}{a}$, $B = \frac{b^2+rs}{b}$ ein, so findet sich, dass list. $c > b$ sein wird, wenn

$$m\alpha r^2 s^2 + [(m\alpha a - \gamma b)a + (m\alpha - \beta)b^2] rs + ab^2[(m\alpha - \beta)a - \gamma b] > 0.$$

Dies wird offenbar der Fall sein, wenn

$$m\alpha a > \beta a + \gamma b,$$

d. i.

$$(m^2 + n)a > (1 + n)b.$$

Es braucht also nur a im Verhältniss zu b hinlänglich gross zu sein, um diese Bedingung zu erfüllen.

Dies mag genügen, um wenigstens die Methode anzuzeigen, nach welcher eine weitere Ausführung der Lehre vom Gleichgewicht der Verschmelzungen, nach unsrer Ansicht, zu behandeln sein dürfte.

Fünfter Abschnitt.

Von den Bewegungen der Vorstellungen überhaupt, insbesondre denen gleichzeitig gegebener.

I. Grundbegriffe.

95.

Ueber den Begriff der Bewegung der Vorstellungen sind bereits oben (§. 16. und 17.) die nöthigen Erklärungen gegeben worden. Wir haben die successive stetige Vermehrung und

Verminderung der Hemmung bezüglich das Sinken und Steigen der Vorstellungen benannt und gezeigt, dass ausser diesen beiden Arten keine dritte denkbar ist. Auch wurde hervorgehoben, dass diese Bewegungen immer nur die Bedeutung intensiver Veränderungen der quantitativen Bestimmungen der freien Thätigkeit des Vorstellens und der dieser entsprechenden Klarheit des Vorgestellten haben. Wenn nun die statischen Untersuchungen nur die Betrachtung der Beziehungen zwischen constanten Grössen erforderten, so kommen in den mechanischen Aufgaben zu den constanten Intensitäten und Gegensätzen noch die veränderlichen Grössen der Zeit, Geschwindigkeit und der von beiden zugleich abhängigen Hemmung hinzu. Von diesen neuen Grössenbegriffen bedarf nur der der Geschwindigkeit einer nähern Erörterung.

96.

Der Begriff der Geschwindigkeit ist so allgemein, dass er nicht blos für die physische Bewegung der Körper und die phoronomische geometrischer Punkte, sondern auch für jede Art von stetigen Veränderungen intensiver Zustände Geltung hat. So hat z. B. glühendes Eisen, das sich abkühlt, eine Geschwindigkeit, mit der sein Wärmegrad und die Intensität des Leuchtens abnimmt; ebenso giebt es eine Geschwindigkeit der Abnahme der elektrischen Spannung eines elektrisirten Körpers bei unvollkommener Isolirung. Es erfordert aber in keinem dieser Fälle die Bestimmung der Geschwindigkeit die Betrachtung der wirklichen räumlichen Bewegungen der Wärme, des Lichts, des elektrischen Fluidums, sondern nur die Kenntniss des Zusammenhangs zwischen den veränderlichen Intensitäten der Erwärmung, Erleuchtung, Spannung mit der Länge der Zeit, die von einem Zeitpunkt aus gerechnet, für welchen diese Intensitäten als bekannte betrachtet werden, verflossen ist. In demselben Sinne und mit dem gleichen Rechte kann sich nun auch die mathematische Psychologie für ihre Bewegungslehre den Begriff der Geschwindigkeit aneignen. Es genügt hierbei, näher zu bestimmen, inwiefern die Geschwindigkeit der psychischen Bewegungen eine Grösse hat, indess es für

die blosse mathematische Behandlung hier ebenso wenig wie in der Phoronomie und physischen Mechanik erforderlich ist, zu erörtern, was Geschwindigkeit an sich sei.

97.

Ganz allgemein ist Geschwindigkeit das eigenthümliche Merkmal, wodurch jedes in stetiger Veränderung begriffene Ding sich von einem ihm sonst nach allen Beziehungen gleichen, aber sich nicht ändernden Dinge unterscheidet.* Ob das, was wir das Ding nennen (das Substrat der Veränderung), körperlicher Art sei oder nicht, seine Veränderung Ort und Lage im Raum oder nur innere Zustände betreffe, ist völlig gleichgültig.

Es ist ferner nöthig, die stetige Veränderung selbst von dem Product derselben zu unterscheiden. So kann z. B. die durch Bewegung erzeugte Linie das Product der Bewegung, der durch allmälige Zuführung der Wärme erzeugte Hitzegrad eines Körpers das Product der Erwärmung, die durch stetig vermehrte Erleuchtung bewirkte Helligkeit einer Fläche das Product der Lichtzunahme genannt werden. Es ist von selbst klar, dass «Product» hier die Summe der beharrenden Wirkungen einer stetigen Reihe vorangegangener Ursachen bezeichnet.

Soll nun eine Grössenbestimmung der Geschwindigkeit, mit der ein Ding seinen Zustand ändert, möglich sein, so muss vorausgesetzt werden, dass die Producte der Veränderung quantitativ vergleichbar sind, d. h. dass sie nicht nur überhaupt als Grössen gedacht, sondern auch ihre Verhältnisse durch Zahlen ausgedrückt werden können.

Die stetige Veränderung eines Dinges heisst nun gleichförmig, wenn die Producte der Veränderung in beliebig klei-

---

* In ähnlicher Weise sagt Poisson (*Mécan. I. p.* 207. *éd.* 2.): *la vitesse d'un point matériel en mouvement est une chose qui reside dans ce point, dont il est animé* (?), *qui le distingue actuellement d'un point matériel en repos, et n'est pas susceptible d'une autre définition.* Das Letztere gilt wenigstens, wenn man sich nicht auf metaphysische Erörterungen einlassen will.

nen oder grossen gleichen Zeiträumen immer gleich sind, **beschleunigt** aber oder **verzögert** (**ungleichförmig**), je nachdem von den in gleichen Zeiträumen entstandenen Producten das dem späteren Zeitraum angehörige bezüglich grösser oder kleiner ist als das in dem frühern entstandene.

98.

Einer **gleichförmigen** stetigen Veränderung kommt ferner eine **grössere** oder **kleinere** Geschwindigkeit als einer andern zu, je nachdem das durch die erstere in einem gegebenen Zeitraum erzeugte Product grösser oder kleiner ist als das, was in demselben Zeitraum durch die andre erzeugt wird. Eine Geschwindigkeit ist $m$mal so gross als eine andre, wenn das Product der Veränderung, der sie zugehört, $m$mal so gross ist als das Product der Veränderung, auf welche sich die andere Geschwindigkeit bezieht. Nimmt man daher diejenige Geschwindigkeit als Einheit an, mit welcher in der Zeiteinheit ein Product erzeugt wird, das bei der Grössenbestimmung der Producte zur Einheit dient, so wird die irgend einer andern stetigen und gleichförmigen Veränderung zugehörige Geschwindigkeit durch die **Grösse** des mit ihr in der Zeiteinheit erzeugten Products ausgedrückt, welche Grösse das **Maass der Geschwindigkeit** heissen kann.

Da jede **ungleichförmige** stetige Veränderung wenigstens während jedes unendlichkleinen Zeittheils ihrer Dauer als eine gleichförmige betrachtet werden kann, so ist das **Maass ihrer Geschwindigkeit** das Product, das in der Zeiteinheit erzeugt werden würde, wenn die Veränderung während dieser Zeiteinheit so gleichförmig bliebe wie während des unendlichkleinen Zeittheils. Da nun letzteres das Differential der Zeit, das während desselben erzeugte Product das Differential des endlichen Products, so ist das in der Zeiteinheit bei gleichförmig bleibender Veränderung erzeugte Product **gleich dem Quotienten aus dem Differential der Zeit in das Differential des Products**, und dieser Quotient das **Maass der Geschwindigkeit**.

99.

In der mathematischen Psychologie sind die Hemmungen der Vorstellungen das in stetiger Veränderung Begriffene, mögen nun, wie beim Sinken der Vorstellungen, die Hemmungen zu-, oder, wie beim Steigen, abnehmen. Das Product dieser Veränderungen ist, wenn die Vorstellungen sinken, die entstandene Hemmung selbst, d. i. die Grösse des Gehemmten, wenn sie dagegen steigen, die dadurch entstandene Befreiung von der Hemmung, d. i. die Grösse, um welche sich die anfängliche Hemmung vermindert hat. Beides lässt sich zusammenfassen, wenn man sagt, das Product sei die in einem gegebenen Zeitraum entstandene positive oder negative Hemmung, wobei sich von selbst versteht, dass die letztere nur als Verminderung einer vorhandenen positiven bis zur gänzlichen Aufhebung derselben möglich ist. Giebt es eine gleichförmige Aenderung der Hemmung, so wird daher das Maass ihrer Geschwindigkeit die absolute Grösse der durch sie in der Zeiteinheit erzeugten positiven oder negativen Hemmung sein. Bei ungleichförmiger Aenderung der Hemmungen ist aber das Maass der Geschwindigkeit der Quotient aus dem Differential der Zeit in das Differential der Hemmung. Bezeichnen wir also das Maass der Geschwindigkeit des Sinkens oder Steigens einer Vorstellung am Ende der Zeit t durch v, die Grösse der während dieser Zeit entstandenen positiven oder negativen Hemmung durch σ, so ist

$$v = \frac{d\sigma}{dt}.$$

Diese Formel bezieht sich, je nachdem $d\sigma$ positiv oder negativ, auf das Sinken oder Steigen der Vorstellung. Ist $d\sigma = 0$, so findet weder das eine noch das andre statt, sondern die Vorstellung beharrt unverändert in ihrem dermaligen Zustand, bleibt in Ruhe.

Ob es gleichförmige Veränderungen der Hemmungen wirklich giebt oder nicht, ist auf die Gültigkeit der vorstehenden Bestimmung des Maasses der Geschwindigkeit bei ungleichförmiger Veränderung ohne allen Einfluss. Es genügt schon, dass sie gedacht werden kann.

100.

Bis hierher hat sich eine vollständige Analogie zwischen den Grundbegriffen der räumlichen Bewegung und denen der stetigen intensiven Veränderung ergeben; die weitere Vergleichung führt aber bald auf Abweichungen von diesem Parallelismus. Die Geschwindigkeit einer ungleichförmigen Bewegung oder intensiven Veränderung ist selbst wieder stetig veränderlich; sie hat folglich selbst wieder eine (constante oder variable) Geschwindigkeit, mit der sie sich ändert. Da jetzt die Geschwindigkeit selbst die veränderliche Grösse ist, so erhellt aus dem Vorigen ohne Weiteres, dass die Geschwindigkeit, mit der sich die Geschwindigkeit ändert, oder, kürzer ausgedrückt, die Geschwindigkeit der Geschwindigkeit der Quotient aus dem Differential der Zeit in das Differential der Geschwindigkeit, folglich, nach der Formel des vorigen §'s, der zweite Differentialquotient der Geschwindigkeit in Beziehung auf die Zeit als unabhängige Veränderliche ist. In diesem Sinne ist nun auch in der mathematischen Psychologie, wenn wir die Geschwindigkeit der Geschwindigkeit der Bewegung einer Vorstellung durch φ bezeichnen,

$$\varphi = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2\sigma}{dt^2}.$$

Bis hierher ist also die intensive Bewegung der Vorstellungen mit der extensiven Bewegung der Punkte im Raume noch in völliger Uebereinstimmung.

101.

Die räumliche Bewegungslehre materieller Punkte verbindet aber mit der vorstehenden Formel, wenn in ihr σ den in der Zeit t beschriebenen Raum bedeutet, noch einen andern Sinn, indem sie diese Ausdrücke von φ zugleich als die beschleunigende Kraft bezeichnet. Insofern nämlich die Aenderung der Geschwindigkeit, dv, während des Zeitelements dt als die Wirkung einer äussern Ursache oder Kraft von der Intensität φ zu betrachten ist, bietet sich als die einfachste Annahme über den Zusammenhang zwischen Kraft und Wirkung die dar, die Grösse der letzteren als zusammengesetzt

proportional der Grösse der Kraft und der Dauer ihrer Wirkung anzunehmen, woraus, wenn diejenige Geschwindigkeitsänderung, welche die nämliche Kraft bei unveränderter Wirkungsart in der Zeiteinheit hervorbringen würde, als Einheit aller Geschwindigkeitsänderungen angenommen wird, sich die Formeln

$$dv = \varphi dt, \quad \varphi = \frac{dv}{dt}$$

ergeben. Ist nun die beschleunigende Kraft als Function der Zeit oder des in derselben beschriebenen Raums (wobei zunächst nur an geradlinige Bewegung zu denken ist) gegeben, so erhält man, wie bekannt, in beiden Fällen durch doppelte Integration einen Ausdruck des beschriebenen Raums als Function der Zeit, welche die Bewegung dauert. Die einfache Integration der ersten der vorstehenden Formeln giebt aber v als Function der Zeit oder des während derselben beschriebenen Raums.

Diese zweite Bedeutung von φ als beschleunigende Kraft lässt sich aber weder auf die mathematische Psychologie noch überhaupt auf stetige intensive Veränderungen übertragen, deren Geschwindigkeiten mit den sie bewirkenden Ursachen in einem andern und zwar einfachern Zusammenhang stehen.

102.

Wir weisen diesen Zusammenhang zunächst nur Beispielsweise an der Ableitung des Newton'schen Gesetzes der Abkühlung erhitzter Körper nach.

Sei zu Anfange der Zeit t die Differenz zwischen der Temperatur eines erhitzten Körpers und der Temperatur der ihn umgebenden Luft $= T$, am Ende dieser Zeit $= T - \tau$, so dass τ die Grösse der Verminderung der Temperatur des Körpers während der Zeit t ausdrückt. Alsdann wird während des nächsten Zeitelements dt die fernere Verminderung der Temperatur des Körpers $= d\tau$ sein. Da nun diese die Folge davon ist, dass die in dem Körper enthaltene Wärme auszustrahlen strebt, und dieses Streben um so grösser sein muss, je grösser der Unterschied zwischen der Temperatur des Körpers und derjenigen der ihn umgebenden Luft ist (deren Temperatur

hierbei als unveränderlich angesehen wird), so wird die einfachste Annahme sein, $d\tau$ dem Product aus der Temperaturdifferenz in das Zeitelement (als der Zeitlänge, während welcher die Temperatur des Körpers als sich gleichbleibend betrachtet werden kann) proportional zu setzen, woraus sich ergiebt

$$d\tau = \alpha(T-\tau)\,dt,$$

wo α eine Constante. Hieraus folgt durch Integration und da für $t=0$, $\tau=0$,

$$\alpha t = \lg n \frac{T}{T-\tau};$$

$$\tau = T(1-e^{-\alpha t}).$$

Hier ist also das Streben der Wärme auszustrahlen oder die dieses Ausstrahlen bewirkende Spannung zwischen dem höhern Wärmegrad des Körpers und dem niedrigern des umgebenden Luftraums die Kraft, welche die Veränderung in der Temperatur des Körpers hervorbringt. Es ist aber dem Product aus ihr in das Differential der Zeit nicht das Differential der Geschwindigkeit der Temperaturveränderung (welche $= \frac{d\tau}{dt}$), sondern das Differential dieser Aenderung selbst ($d\tau$), dagegen die Geschwindigkeit selbst ($\frac{d\tau}{dt}$) der verändernden Kraft ($T-\tau$) direct proportional.

In ganz gleicher Weise leitet Coulomb das Gesetz der Abnahme der elektrischen Spannung eines elektrisirten, aber unvollkommen isolirten Körpers ab. Auch sind Lambert's und Bouguer's Formeln für die allmälige Verdunkelung eines in einem halbdurchsichtigen Fluidum untersinkenden Körpers auf ähnliche Betrachtungen gegründet.

103.

Der allgemeine Grund, warum in diesen Fällen der stetigen intensiven Veränderung die Kraft der Geschwindigkeit selbst, oder innerhalb des Zeitelements dem Differential des Products der Veränderung, dagegen bei der Bewegung materieller Punkte im Raum die Kraft dem Differentialquotienten, oder, wenn nur von der Wirkung während des Zeitelements die Rede ist, dem Differential der Geschwindigkeit proportional ist, liegt darin, dass bei intensiven stetigen Veränderungen der angegebenen

Art das Trägheitsgesetz keine Anwendung findet. Die Bewegung, die einem Körper oder materiellen Punkte durch irgend eine momentan wirksame Ursache, z. B. einen Stoss, ertheilt wird, dauert unverändert fort, auch nachdem die Ursache zu wirken aufgehört hat. Die Bewegung ist, wenn keine neue Wirkung hinzukommt, eine gleichförmige, die Geschwindigkeit constant. Ertheilt daher eine constant, aber stetig wirkende Kraft einem materiellen Punkte in jedem Zeitelement einen unendlichkleinen Impuls nach der Richtung, in der er sich schon bewegt, also eine unendlichkleine Geschwindigkeitsänderung, so vermehrt jede nicht nur für das Zeitelement, in dem sie ertheilt wird, sondern auch für alle folgenden die Geschwindigkeit des Punktes, es summiren sich diese Geschwindigkeitsänderungen, und die Geschwindigkeit für irgend eine gegebene Zeit enthält die Summe aller. Wird dagegen durch eine Kraft ein intensiver Zustand geändert, so ändert sich dieser nicht weiter, wenn die Kraft zu wirken aufgehört hat — wie dies der Fall sein müsste, wenn etwas der Trägheit Analoges stattfände, wo dann die Aenderung sich von selbst mit constanter Geschwindigkeit fortsetzen müsste —, sondern eine neue Aenderung fordert eine neue Wirkung der Kraft, und es gilt hier der Grundsatz: *cessante causa cessat effectus.* Es giebt also in dem Gebiete der intensiven stetigen Veränderungen nichts Analoges zu der sich von selbst und ohne neue Ursache fortsetzenden Bewegung, sondern was hier bildlich Bewegung heisst, muss in jedem neuen Zeitelement durch eine neue Wirkung der Kraft ganz erzeugt werden. Daher bewirkt hier die Kraft nicht eine Veränderung der Geschwindigkeit, die unabhängig von ihr gar nicht fortbesteht, sondern unmittelbar eine Veränderung des Products der Veränderung, also dessen, dem in der physischen Bewegung der beschriebene Raum analog ist.

104.

In die Classe der intensiven stetigen Veränderungen gehören nun auch die Bewegungen der Vorstellungen, die unter den einfachsten Verhältnissen in der That nach demselben Gesetz erfolgen, das in §. 102. entwickelt ist. Wir sprechen zunächst vom Gesetz des Sinkens einer Vorstellung. Eine Vorstellung sinkt nur dann, wenn sie gleichzeitig mit einer oder mehreren andern entgegengesetzten Vorstellungen gegeben ist. Wie wir nämlich gesehen haben, entsteht dann zwischen den Vorstellungen ein gewisses Streben sich zu hemmen (die Hemmungssumme), das nach bestimmten Verhältnissen sich auf die Vorstellungen vertheilt und diese wirklich hemmt. Da dies aber nur allmälig geschehen kann, so ist die Grösse der Hemmung mit der Zeit veränderlich und eine Function derselben. Sei nun für eine gegebene Vorstellung die Stärke der auf sie fallenden Nöthigung zur Hemmung oder, was dasselbe, der auf sie kommende Antheil an der HS. $= S_0$. Sei die Vorstellung zu Anfange der Zeit t völlig ungehemmt, am Ende derselben aber ihre Hemmung $= \sigma$, so ist, da σ zugleich ihr Widerstreben gegen die Hemmung ausdrückt (indem jede Vorstellung in dem Maasse, in welchem sie gehemmt wird, auch wieder von der Hemmung frei zu werden strebt), die noch übrige Nöthigung zur Hemmung $= S_0 - \sigma$. Diese Differenz drückt die Spannung, die Kraft aus, die in dem nächsten Zeitelement dt eine weitere Vermehrung der Hemmung, $d\sigma$, bewirken muss. Demnach ist, gemäss dem im vorigen §. entwickelten Grundsatz,

$$d\sigma = \alpha(S_0 - \sigma)\,dt,$$

wo α eine Constante; daher

$$v = \frac{d\sigma}{dt} = \alpha(S_0 - \sigma).$$

Sei für eine andre Hemmung σ_0, am Ende der Zeit t_0, die Geschwindigkeit $= v_0$, so wird ebenso

$$v_0 = \alpha(S_0 - \sigma_0),$$

daher durch Verbindung beider Formeln

$$v = \left(\frac{S_0 - \sigma}{S_0 - \sigma_0}\right) v_0.$$

Setzt man nun für $S_0 - \sigma_0 = 1$ auch $v_0 = 1$, nimmt also diejenige Geschwindigkeit zur Einheit, die der Vorstellung zukommt, wenn die sie zum Sinken nöthigende Kraft der Einheit der Intensitäten gleich ist, so wird

$$\left.\begin{aligned} v &= S_0 - \sigma, \\ \text{also } d\sigma &= (S_0 - \sigma)\, dt. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Die Integration dieser Formel giebt, wenn man beachtet, dass für $t = 0$, $\sigma = 0$,

$$t = \lg n \frac{S_0}{S_0 - \sigma}. \quad (2)$$

Hieraus ergiebt sich ferner

$$\sigma = S_0 (1 - e^{-t}), \quad (3)$$

und durch Substitution dieses Werthes in (1)

$$v = \frac{d\sigma}{dt} = S_0 e^{-t}. \quad (4)$$

105.

Aus diesen Formeln fliessen nachstehende Folgerungen.

1. Setzen wir für e^{-t} die bekannte unendliche Reihe, so wird $\sigma = S_0 (t - \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{6} t^3 \ldots\ldots)$.

Hieraus ergiebt sich, dass, da für hinlänglich kleine Werthe von t die zweiten und höhern Potenzen dieser Grösse vernachlässigt werden können, im ersten Anfang des Sinkens einer Vorstellung das Quantum ihrer Hemmung der Zeit direct und einfach proportional ist.

2. Es wird $\sigma = 1$ für $t = \lg n \frac{S_0}{S_0 - 1}$, was, wenn es einen reellen endlichen Werth darstellen soll, $S_0 > 1$ voraussetzt. Ist also $S_0 \leqq 1$, so erreicht die Hemmung nie die Grösse der Einheit der Intensität, was natürlich, da immer $\sigma \leqq S_0$.

Es wird $v = 1$ für $\sigma = S_0 - 1$ und $t = \lg n\, S_0$, also ebenfalls nur, wenn $S_0 > 1$.

Es wird $t = 1$ für $\sigma = S_0 (1 - e^{-1}) = 0{,}63212 . S_0$ nahe $= \frac{7}{11} S_0$; die Zeiteinheit ist also hier derjenige Zeitraum, in welchem die Vorstellung um $\frac{7}{11}$ des Antheils an der HS. gesunken ist.

3. Es kann nie $\sigma > S_0$ werden, wenn nicht t unmöglich werden soll. Es wird aber $\sigma = S_0$ für $t = \infty$, d. h. in keiner endlichen Zeit gelangt die Vorstellung zu der für das Gleichgewicht geforderten Hemmung, oder sinkt bis zu ihrem statischen Punkte.

4. Es ist aber $S_0 - \sigma = S_0 e^{-t}$; die Differenz der für das Gleichgewicht geforderten und der in der Zeit t vollzogenen Hemmung, oder der Abstand der Vorstellung von ihrem statischen Punkte ist um so kleiner, je grösser die Zeit, und wird Null, wenn diese unendlich wird. Die Vorstellung nähert sich also ohne Ende dem Gleichgewicht. Dass aber schon nach Verlauf von wenigen Zeiteinheiten die Annäherung an die für das Gleichgewicht erforderliche Hemmung sehr gross ist, zeigt folgende Tabelle:

t	$\frac{S_0-\sigma}{S_0} = e^{-t}$	t	$\frac{S_0-\sigma}{S_0} = e^{-t}$	t	$\frac{S_0-\sigma}{S_0} = e^{-t}$	t	$\frac{S_0-\sigma}{S_0} = e^{-t}$
0	1,00000	0,5	0,60653	1	0,36788	6	0,00248
0,1	0,90484	0,6	0,54881	2	0,13534	7	0,00091
0,2	0,81873	0,7	0,49659	3	0,04979	8	0,00034
0,3	0,74082	0,8	0,44933	4	0,01832	9	0,00012
0,4	0,67032	0,9	0,40657	5	0,00674	10	0,00005

Da $v = S_0 e^{-t}$, so giebt diese Tabelle zugleich eine Uebersicht von der allmäligen Verminderung der Geschwindigkeit, die mit $t = \infty$ Null wird. Da endlich $dv = -S_0 e^{-t} dt$, so zeigt sie auch, wie die Abnahme der Geschwindigkeit immer kleiner und endlich Null wird.

106.

Diese Gesetze des Sinkens einer Vorstellung lassen sich durch Construction veranschaulichen. Stelle (Fig. 1.) die Länge der Geraden AO die Intensität einer gegebenen Vorstellung dar, OQ ihren Antheil an der HS., also AQ ihren Rest im Gleichgewicht; ferner die senkrecht auf AO errichtete unbegrenzte Gerade OZ oder eine ihrer Parallelen QZ', AZ'' die Zeitlinie, so wird die Hemmung und der gleichzeitige Rest der Vorstellung durch die senkrechten Ordinaten Mp, MP' der logarith-

mischen Linie *OMN* in Bezug auf *OZ* und *AZ''* versinnlicht. Ist also $Op = QP = AP' = t$, $OQ = pP = S_0$, $Mp = \sigma$, so ist $MP = S_0 - \sigma$. Ist ferner *MT* die Berührende der Curve *OMN* in *M*, so ist $\frac{d.MP}{dt} = \frac{d(S_0-\sigma)}{dt} = -\operatorname{tg} MTP = -\frac{MP}{PT}$ $= -\frac{(S_0-\sigma)}{PT}$. Da aber zugleich $\frac{d(S_0-\sigma)}{dt} = -\frac{d\sigma}{dt} = -(S_0-\sigma)$, so folgt hieraus $PT = 1$, gleich der Zeiteinheit, folglich, wenn wir die Linie, welche die Zeit, und die, welche die Intensität repräsentirt, durch ein und dasselbe Maass gemessen denken, gleich der Längeneinheit dieser Linien; in der Figur ist $OQ = 1$, $OA = \frac{3}{2}$ angenommen. Zugleich folgt hieraus $v = \frac{d\sigma}{dt} = \frac{MP}{PT}$ $= \frac{MP}{1}$, d. h. das Verhältniss von *MP* zur Längeneinheit *PT* stellt die Geschwindigkeit dar, welche die Vorstellung am Ende der Zeit $t = Op = QP = AP'$ hat. Die Zunahme der Hemmung der Vorstellung und Abnahme ihrer Freiheit und der derselben entsprechenden Klarheit wird also durch die Bewegung eines Punktes dargestellt, der während der durch $Op = QP = AP'$ dargestellten Zeit den Bogen *OM* beschreibt, und sich, wenn die Zeit ins Unendliche wächst, in der logarithmischen Linie *OMN* ohne Ende der Asymptote *QPZ'* nähert. Die Linie *AZ''* stellt die Grenze des Bewusstseins dar; *Q* bezeichnet den statischen Punkt der Vorstellung *AO* (vgl. §. 59.); endlich kann die Asymptote *QZ'* auch als ihre statische Linie bezeichnet werden.*

---

* Die Curve hat ausserdem nach der negativen Seite der Abscissenaxe hin eine ins Unendliche gehende Verlängerung, welche aber für die Bewegung der Vorstellung ohne Bedeutung ist. In ähnlicher Weise hat auch die ballistische Curve einen rückwärtsgehenden, sich einer Asymptote nähernden Zweig, der für das ballistische Problem keine Bedeutung hat. Auch für einen Kometen, der sich in einer Hyperbel bewegt, kann nur der eine Zweig der Hyperbel die Bahn darstellen. Wir würden alles dies nicht erwähnen, wenn wir uns nicht erinnerten, schon vor vielen Jahren gehört zu haben, es sei der mathematischen Psychologie von einem berühmten Analysten zum Vorwurf gemacht worden, dass sie in dem Ausdruck für den statischen Grenzwerth (§. 56. (1)) nur das positive Zeichen der Quadratwurzel gebrauche und das negative als bedeutungslos weg-

107.

Im Vorhergehenden ist angenommen, dass der Antheil der sinkenden Vorstellung an der HS. kleiner sei als ihre Intensität, folglich im Gleichgewicht von der Vorstellung ein Rest im Bewusstsein bleibe; und es zeigte sich, dass dann die dem Gleichgewicht zukommende Hemmung in keiner endlichen Zeit völlig erreicht werde. Es ändert sich hierin nichts Wesentliches, wenn jener Antheil der Intensität gleich ist, also die Vorstellung in Beziehung auf die ihr gegenüberstehenden entgegengesetzten Vorstellungen einen statischen Grenzwerth hat. Denn sei die Intensität der Vorstellung $= c$, so wird dann $S_0 = c$ und daher (§. 104. (2)) $t = \lg n \frac{c}{c-\sigma}$, folglich, wenn $\sigma = c$ sein soll, $t = \infty$.

Andre Verhältnisse treten dagegen ein, wenn $S_0 > c$, die Intensität der Vorstellung also kleiner als der statische Grenzwerth ist. Sei dann $S_0 = c + \gamma$, so wird

$$t = \lg n \frac{c+\gamma}{c+\gamma-\sigma}.$$

Setzen wir nun $\sigma = c$, so ergiebt sich

$$t = \lg n \frac{c+\gamma}{\gamma} = \lg n \frac{S_0}{S_0 - c},$$

also offenbar ein endlicher Werth. Da er nur von S_0 und c abhängt, so erhellt, dass diese Zeit für alle Vorstellun-

---

werfe, da doch auch dieses, wenn die Formel wahr sei, eine Bedeutung haben müsse, ein Tadel, der bei Formeln der angewandten Mathematik, in solcher Allgemeinheit ausgesprochen, keine Berechtigung hat. Was die ganze Darstellung der Bewegung der Vorstellungen durch Curven betrifft, so wird hoffentlich Niemand in ihr eine thatsächliche Widerlegung der in §. 17. ausgesprochenen Behauptung finden, «eine der seitlichen Richtung der Bewegung eines Punktes im Raume analoge Veränderung des Zustandes der Vorstellungen sei undenkbar.» Die Curve versinnlicht nur die Ab- und Zunahme der Hemmung mit der Zeit, ganz so wie sich die gleichförmig beschleunigte geradlinige Bewegung eines Punktes durch eine Parabel versinnlichen lässt. Das Bild der Ab- und Zunahme der Hemmung selbst, wie jeder intensiven Veränderung, ist und bleibt aber eine ab- und zunehmende Gerade, in der Figur die veränderliche Linie OM.

gen dieselbe ist, deren Intensität zu ihrem Antheil an der HS. in demselben Verhältniss steht, mag letztere von vielen oder wenigen, voll oder nur graduell entgegengesetzten Vorstellungen herrühren. Nach Ablauf dieser Zeit ist nun zwar die Vorstellung nicht im Gleichgewicht mit den andern, denn dies forderte $\sigma = c + \gamma = S_0$; wohl aber ist sie völlig gehemmt. Sie verschwindet also mit diesem Zeitpunkt gänzlich aus dem Bewusstsein und sinkt auf die Grenze desselben. Da sie nun nicht mehr als ganz gehemmt werden kann — eine Bewegung unterhalb der Grenze des Bewusstseins undenkbar ist —, so hört für sie alle Bewegung plötzlich auf.

Auch dies lässt sich durch Construction versinnlichen. Sei (Fig. 2.) $CO = c$, $CQ = \gamma$, so liegt sowohl der statische Punkt Q als die statische Linie QZ'' unter der Grenze des Bewusstseins CZ'. Die Vorstellung sinkt nach der Curve OM und erreicht die Grenze des Bewusstseins in der Zeit $CM = \lg n \frac{c+\gamma}{\gamma}$, im Punkte M. Hier hört ihre Bewegung auf, und die Fortsetzung MN der Curve unter der Bewusstseinsgrenze ist nur eine ideale, welche für die psychische Bewegung ebenso bedeutungslos ist wie die Fortsetzung der Curve nach der Richtung von M zu O über dieses hinaus.

108.

Offenbar ist die bis zum Verschwinden von c aus dem Bewusstsein verlaufende Zeit um so kürzer, je grösser $\gamma = S_0 - c$. Nehmen wir drei voll entgegengesetzte Vorstellungen a, b, c an, von denen c die schwächste sein soll, so ist (§. 56. (1)) list. $c = b\sqrt{\frac{a}{a+b}}$. Alsdann ist also $S_0 = c = b\sqrt{\frac{a}{a+b}}$. Ist c kleiner als dieser Werth, so giebt die Differenz $S_0 - c$ den Werth von γ. Die folgende Tabelle giebt für einige der in §. 56. berechneten statischen Grenzwerthe die numerischen Bestimmungen von $\lg n \frac{c+\gamma}{\gamma} = \lg n \frac{S_0}{S_0 - c}$, als der Zeit an, in welcher c auf die Grenze des Bewusstseins sinkt.

b	a	$b\sqrt{\frac{a}{a+b}}$	c	$\frac{S_0}{S_0-c}$	$\lg n\frac{S_0}{S_0-c}$
10	10	7,07	7	85,00	4,44
	15	7,74	7	9,27	2,23
	20	8,16	7	6,41	1,86
	20	8,16	8	45,00	3,81
	40	8,94	8	9,00	2,20
	100	9,53	9	17,43	2,86

Von allgemeinerer Bedeutung ist die folgende Zahlentafel, in welcher durchgängig $c = 1$ gesetzt ist, und die unter dieser Voraussetzung zeigt, welche Zeit des Sinkens auf die Grenze des Bewusstseins c braucht, wenn sein Antheil an der HS. seine Intensität um die in der ersten Columne enthaltene Grösse übertrifft.

S_0-c	$\lg n\frac{S_0}{S_0-c}$	S_0-c	$\lg n\frac{S_0}{S_0-c}$	S_0-c	$\lg n\frac{S_0}{S_0-c}$	S_0-c	$\lg n\frac{S_0}{S_0-c}$
0,01	4,615	0,06	2,872	0,2	1,792	0,7	0,887
0,02	3,932	0,07	2,727	0,3	1,465	0,8	0,811
0,03	3,536	0,08	2,603	0,4	1,253	0,9	0,747
0,04	3,258	0,09	2,494	0,5	1,099	1,0	0,693
0,05	3,045	0,10	2,398	0,6	0,981		

Hieraus ist ersichtlich, dass, selbst wenn der Antheil von c an der HS. die Intensität von c auch nur um den hundertsten Theil der letztern übertrifft, c doch nach weniger als fünf Zeiteinheiten aus dem Bewusstsein verschwunden ist, dass dies aber schon in Einer Zeiteinheit geschieht, wenn der Ueberschuss jenes Antheils über die Intensität sechs Zehntel von dieser beträgt. Es muss also dieser Ueberschuss **sehr** klein sein, c dem statischen Grenzwerth **sehr** nahe liegen, wenn zu seinem Verschwinden aus dem Bewusstsein eine **beträchtliche** Anzahl von Zeiteinheiten erforderlich sein soll. Da nun die Zahl der Fälle, in denen c dem statischen Grenzwerth so nahe gleich ist, von der Zahl der Fälle, in denen es beliebig kleiner ist, unendlich übertroffen wird, so kann man sagen, **dass, wenn c unter dem statischen Grenzwerth liegt, es in der Regel schon nach wenigen Zeiteinheiten aus dem Bewusstsein verschwinden wird.**

109.

Bis hierher haben wir nur die sinkende Bewegung Einer Vorstellung in Betrachtung gezogen. Eine solche findet aber nie statt ohne gleichzeitige Bewegung andrer Vorstellungen, da nur zwei oder mehrere eine HS. geben und sich gegenseitig zum Sinken nöthigen. Wenn nun aber mehrere entgegengesetzte Vorstellungen $a_1, a_2, \ldots a_n$ gleichzeitig und anfänglich ungehemmt gegeben sind, ihre HS. $= S$ und ihre Antheile an dieser der Reihe nach $S_1, S_2, \ldots S_n$, endlich die Hemmungen, die sie nach Ablauf der Zeit t wirklich erlitten haben, der Reihe nach $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$ sind, so ergiebt sich aus §. 104, (3) durch Vertauschung der Buchstaben

$$\sigma_1 = S_1(1-e^{-t});\ \sigma_2 = S_2(1-e^{-t}); \ldots\ldots \sigma_n = S_n(1-e^{-t}).$$

Es ist demnach am Ende der Zeit t

$$\sigma_1 : \sigma_2 \ldots : \sigma_n = S_1 : S_2 \ldots : S_n,$$

d. i. die in der Zeit t von den Vorstellungen erlittenen Hemmungen sind den Antheilen an der HS., die sie im Gleichgewicht haben müssen, direct proportional.

Setzt man $\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n = \Sigma$, so ist am Ende der Zeit t

$$\Sigma = S(1-e^{-t}),$$

welche Formel angiebt, wieviel von der HS., als der Summe des für das Gleichgewicht zu Hemmenden, nun wirklich gehemmt ist.*

110.

Offenbar gehen alle diese Bewegungen ohne alle Unterbrechung der Stetigkeit von Statten, so lange alle Vorstellungen im Bewusstsein bleiben. Eine Unterbrechung der Stetigkeit

* Herbart bezeichnet diese Formel als die, welche ausdrücke, um wieviel a. E. der Zeit t «die HS. gesunken sei». Wir können uns diesen Ausdruck nicht aneignen. Die HS. ist eine constante Grösse, die also weder sinken noch steigen kann, auch ist sie nicht ein von den Vorstellungen unabhängig Bestehendes, wie etwa ein Gewicht, das, in eine Wagschale gelegt, diese zum Sinken nöthigt und mit ihr sinkt. Wir glauben daher nur den Vorstellungen selbst die Prädicate des Sinkens und Steigens beilegen zu dürfen.

tritt aber ein, sobald eine der Vorstellungen, deren Intensität unter dem statischen Grenzwerth liegt, auf die Grenze des Bewusstseins sinkt und also völlig gehemmt ist, mithin verschwindet. Sei z. B. a_n eine solche Vorstellung, so bleibt von dem auf sie fallenden Antheil an der HS. S_n, nachdem sie völlig gehemmt ist, noch der Rest

$$S_n - a_n$$

übrig. Sind nun gleichzeitig die Hemmungen der übrigen Vorstellungen der Reihe nach σ^0_1, σ^0_2,.... σ^0_{n-1}, so bleiben von ihren Antheilen an der HS. alsdann der Reihe nach noch übrig die Reste

$$S_1 - \sigma^0_1,\ S_2 - \sigma^0_2, \ldots.\ S_{n-1} - \sigma^0_{n-1},$$

so dass der Gesammtrest R der HS. S oder das von dieser noch übrig zu Hemmende sein wird

$$R = S - (\sigma_1^0 + \sigma^0_2 + \ldots. + \sigma^0_{n-1} + a_n);$$

oder, da offenbar auch (vor. §.)

$$\sigma^0_1 = \frac{S_1}{S_n} a_n;\quad \sigma^0_2 = \frac{S_2}{S_n} a_n; \ldots.\ \sigma^0_{n-1} = \frac{S_{n-1}}{S_n} a_n;$$

$$R = \frac{S}{S_n}(S_n - a_n).$$

Dieser Rest vertheilt sich aber jetzt allein auf die noch im Bewusstsein befindlichen Vorstellungen a_1, a_2,... a_{n-1}, deren Antheile daran R_1, R_2,... R_{n-1} sein mögen (vgl. §. 58. u. 62.). Hiermit beginnt nun für diese Vorstellungen eine neue Bewegung mit sprungweise veränderter Geschwindigkeit, welche zwar nach denselben allgemeinen Gesetzen erfolgt, wobei jedoch die Constanten andre Werthe erhalten. Seien nämlich nach Verlauf der Zeit τ, vom Anfange dieses **zweiten Stadiums** der Bewegung an gerechnet, die weiteren Hemmungen der im Bewusstsein bleibenden Vorstellungen a_1, a_2,... a_{n-1} der Reihe nach

$$\rho_1,\ \rho_2, \ldots\ \rho_{n-1},$$

so wird sein

$$\rho_1 = R_1(1 - e^{-\tau});\ \rho_2 = R_2(1 - e^{-\tau}); \ldots.\ \rho_{n-1} = R_{n-1}(1 - e^{-\tau});$$

so dass also nach Ablauf der Zeit τ im zweiten Stadium der Bewegung von den $n - 1$ verbliebenen Vorstellungen der Reihe nach gehemmt sein wird

$$\sigma^0_1 + \rho_1,\ \sigma^0_2 + \rho_2, \ldots\ldots\ \sigma^0_{n-1} + \rho_{n-1}.$$

Die Zeitlänge T des **ersten Stadiums** der Bewegung,

das mit dem Verschwinden von a_n aus dem Bewusstsein schliesst, findet sich sofort aus der Gleichung für σ_n in §. 109., wenn man in dieser $t = T$ und $\sigma_n = a_n$ setzt. Es ergiebt sich daraus

$$T = \lg n \frac{S_n}{S_n - a_n}.$$

111.

Wir erläutern zuvörderst diese Rechnung an drei voll entgegengesetzten Vorstellungen a, b, c, von denen $c < b\sqrt{\frac{a}{a+b}}$ sein mag. Hier ist also (§. 44. 2.)

$$S_1 = \frac{bc(b+c)}{ab+ac+bc}; \quad S_2 = \frac{ac(b+c)}{ab+ac+bc}; \quad S_3 = \frac{ab(b+c)}{ab+ac+bc};$$

daher $$T = \lg n \frac{ab(b+c)}{abb-(a+b)cc}.$$

Alsdann ist

$$\sigma^0_1 = \frac{S_1}{S_3}c = \frac{cc}{a}; \quad \sigma^0_2 = \frac{S_2}{S_3}c = \frac{cc}{b};$$

$$R = \frac{S}{S_3}(S_3 - c) = S - (\sigma^0_1 + \sigma^0_2 + c) = \frac{abb-(a+b)cc}{ab};$$

daher
$$R_1 = \frac{bR}{a+b} = \frac{bb}{a+b} - \frac{cc}{a};$$

$$R_2 = \frac{aR}{a+b} = \frac{ab}{a+b} - \frac{cc}{b};$$

folglich
$$\rho_1 = \left(\frac{bb}{a+b} - \frac{cc}{a}\right)(1 - e^{-\tau});$$

$$\rho_2 = \left(\frac{ab}{a+b} - \frac{cc}{b}\right)(1 - e^{-\tau}).$$

Für $\tau = \infty$ wird daher

$$\sigma^0_1 + \rho_1 = \frac{bb}{a+b}; \quad \sigma^0_2 + \rho_2 = \frac{ab}{a+b};$$

es ist also dann so viel gehemmt, als das Gleichgewicht erfordert (§. 58.).

Sei z. B. $a = 15$, $b = 10$, $c = 7$, so wird (vgl. die erste Tabelle in §. 108.) $T = 2{,}23$.

$\sigma^0_1 = 3{,}267$; $\sigma^0_2 = 4{,}900$; $R = 1{,}833$; $R_1 = 0{,}733$; $R_2 = 1{,}100$;

daher $\rho_1 = 0{,}733(1 - e^{-\tau})$; $\rho_2 = 1{,}100(1 - e^{-\tau})$.

Hieraus findet sich z. B. für $\tau = 4$

$$\rho_1 = 0{,}720; \quad \rho_2 = 1{,}080.$$

Daher ist für $T + \tau = 6,23$, also vom Anfang des ersten Bewegungsstadiums gerechnet,

$$\sigma^0_1 + \rho_1 = 3,987; \quad \sigma^0_2 + \rho_2 = 5,980;$$

welche Werthe von den zu $\tau = \infty$ gehörigen Werthen 4,000, 6,000 nur noch um 0,013 und 0,020 abweichen, so dass schon nach Ablauf von $6\frac{1}{4}$ Zeiteinheiten vom Anfang des ersten Stadiums gerechnet die Vorstellungen nahe im Gleichgewicht sind.

112.

Dass nun bei der plötzlichen Veränderung der constanten Grössen $S_1, S_2, \ldots S_{n-1}$ in $R_1, R_2, \ldots R_{n-1}$ eine Unterbrechung der Stetigkeit der Bewegung eintreten muss, zeigt am deutlichsten die Vergleichung der Endgeschwindigkeiten der Vorstellung beim Ausgang des ersten Bewegungsstadiums mit den Anfangsgeschwindigkeiten derselben beim Eintritt des zweiten Stadiums. Sei die Geschwindigkeit einer Vorstellung a_k im ersten Stadium, also am Ende der Zeit t, $= v_k$, im zweiten Stadium, also am Ende der vom Anfang dieses Stadiums aus gerechneten Zeit τ, $= v'_k$, so ist nach §. 104. (4)

$$v_k = S_k e^{-t}; \quad v'_k = R_k e^{-t}.$$

Ist nun V_k die Endgeschwindigkeit von a_k für das erste, V^0_k die Anfangsgeschwindigkeit derselben für das zweite Bewegungsstadium, so wird, da dann bezüglich $t = T = \lg n \frac{S_n}{S_n - a_n}$, $\tau = 0$, oder $e^{-t} = \frac{S_n - a_n}{S_n}$, $e^{-\tau} = 0$ zu setzen ist,

$$V_k = \frac{S_k}{S_n}(S_n - a_n); \quad V^0_k = R_k.$$

Die Endgeschwindigkeit der aus dem Bewusstsein verschwindenden Vorstellung a_n ist hiernach

$$V_n = S_n - a_n.$$

Da $R = \frac{S}{S_n}(S_n - a_n)$ war (§. 110.), so können wir auch

$$V^0_k = R_k = \frac{q'_k S}{S_n}(S_n - a_n)$$

setzen, wo q'_k den echten Bruch bedeutet, mit dem sich a_k an R betheiligt. Setzen wir ebenso

$$V_k = \frac{q_k S}{S_n}(S_n - a_n),$$

wo q_k der echte Bruch, mit dem a_k an S Antheil hat, so wird

$$V_k : V^0_k = q_k : q'_k.$$

Da nun q_k und q'_k nichts Anderes sind als die Verhältnisszahlen, nach denen a_k an der HS. im ersten, oder an dem Rest des noch zu Hemmenden im zweiten Stadium Theil nehmen muss, diese Zahlen sich aber nach dem Verschwinden von a_n aus dem Bewusstsein plötzlich ändern, so leuchtet ein, dass die Geschwindigkeit jetzt eine plötzliche Aenderung erleidet. Für durchgängig gleiche Gegensätze der Vorstellungen ist

$$q_k = \frac{\frac{1}{a_k}}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}};$$

$$q'_k = \frac{\frac{1}{a_k}}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_{n-1}}};$$

also $q_k < q'_k$, die Geschwindigkeitsänderung ist eine Vermehrung. Dasselbe lässt sich bei drei Vorstellungen auch leicht für ungleiche Gegensätze nachweisen. Zugleich erhellt, da für gleiche Gegensätze das Verhältniss $q_k : q'_k$ von k unabhängig ist, dass dann alle Vorstellungen beim Beginn des zweiten Bewegungsstadiums eine gleiche Geschwindigkeitsvermehrung erhalten. In dem Beispiel des vorigen §'s ist

$$q_1 = \frac{14}{65}; \quad q_2 = \frac{21}{65}; \quad q'_1 = \frac{2}{5}; \quad q'_2 = \frac{3}{5};$$

daher $$V_1 : V^0_1 = V_2 : V^0_2 = 7 : 13.$$

113.

Die Bewegung der Vorstellung a_k in ihren beiden Stadien wird durch constructive Darstellung noch deutlicher. Im ersten Stadium, wo $\sigma_k = S_k(1-e^{-t})$, stellt, wenn in Fig. 3. $OQ = S^k$ gemacht wird, die Parallele QZ' offenbar die statische Linie dar, der sich die sinkende Vorstellung in der logarithmischen Curve OMN ohne Ende nähern würde, wenn nicht mit der Zeit $Op = AP' = T = \lg n \frac{S_n}{S_n - a_n}$ diese Bewegung bei M abbräche. Das erste Stadium ist also durch AO und $P'p$ begrenzt. Am Ende desselben stellt $pM = \sigma'_k = \frac{S_k}{S_n} a_n$ die Grösse der vollzogenen Hemmung dar. Im zweiten Stadium wird nun

$\rho_k = R_k(1-e^{-\tau}) = \frac{q'_k S}{S_n}(S_n - a_n)(1-e^{-\tau})$. Es nähert sich also ρ_k ohne Ende dem Werthe R_k, mithin die **ganze** Hemmung der Vorstellung dem Werthe

$$\sigma^0_k + R_k = \frac{S_k}{S_n} a_n + \frac{q'_k S}{S_n}(S_n - a_n),$$

oder, wenn, wie im vor. §., $S_k = q_k S$ gesetzt wird, dem Werthe

$$[q_k a_n + q'_k(S_n - a_n)]\frac{S}{S_n},$$

welcher für das zweite Stadium den Abstand der statischen Linie von Op ausdrückt. Dieser Ausdruck ist $\gtreqless S_k$ oder $q_k S$, je nachdem $q'_k \gtreqless q_k$. Es ist im vorigen §. bemerkt worden, dass für gleiche Gegensätze allgemein und bei drei Vorstellungen auch für ungleiche Gegensätze $q'_k > q_k$ ist. Unter dieser Voraussetzung stellt in der Figur $OQ_1 > OQ$ den Abstand der statischen Linie $Q_1Z'_1$ für das zweite Stadium dar, die nun zu der neuen logarithmischen Curve MN_1 die Asymptote wird. Ist nun MT die bis zum Einschnitt in $Q_1Z'_1$ verlängerte Berührende an OM in M, MT_1 die bis ebendahin verlängerte Berührende an MN_1 in M, so stellt $\frac{MP}{PT} = \tang MTP$ die Endgeschwindigkeit im ersten, $\frac{MP}{PT_1} = \tang MT_1P$ die Anfangsgeschwindigkeit im zweiten Stadium dar (§. 106.), die beiden Geschwindigkeiten verhalten sich also wie $PT_1 : PT$.

Haben mehrere der n Vorstellungen $a_1, a_2, \ldots a_n$ Werthe, die unter dem statischen Grenzwerth liegen, so erhellt aus der Formel für T (§. 110.), dass sie nach der umgekehrten Ordnung der Grösse ihrer Intensitäten, also die schwächsten zuerst, aus dem Bewusstsein verschwinden, und für die zurückbleibenden Vorstellungen sich so viele Stadien der Bewegung bilden werden, als solche verschwindende Vorstellungen vorhanden sind. Beim Uebergange aus jedem Stadium in das nächstfolgende leidet die Stetigkeit der Bewegung eine solche Unterbrechung, wie sie im Vorstehenden ausführlich erörtert wurde.

114.

An diese Untersuchungen über das Sinken der Vorstellungen mögen sich noch die einfachsten Bestimmungen über die

Gesetze ihres Steigens anschliessen. Sie sind im Allgemeinen denen des Sinkens vollkommen ähnlich. Eine ganz oder theilweise gehemmte Vorstellung steigt, sobald und wieweit die Ursache ihrer Hemmung beseitigt ist; denn das mit der Hemmung stets verbundene Streben der Vorstellung, wieder frei zu werden, tritt sofort in Wirksamkeit, wenn die Ursachen der Hemmung weichen. Unter welchen Umständen dies möglich ist, mag hier noch unerörtert bleiben; wir werden bald darauf zurückkommen. Von selbst versteht es sich, dass eine Vorstellung nicht höher steigen kann als bis zu dem Punkt, wo sie von der Hemmung völlig befreit ist und ihre ursprüngliche, der vollen Intensität proportionale Klarheit wieder erlangt hat. Dies ist ihre grösstmögliche absolute Höhe, zu der sie nur aufsteigen kann, nachdem die Ursache ihrer Hemmung ganz beseitigt ist. Geschieht dies aber nur theilweise, so wird der auf ihr lastende Antheil an der HS. nur vermindert, und sie kann um nicht mehr steigen, als diese Verminderung beträgt. Dies ist dann ihre grösstmögliche relative Höhe, die grösste nämlich, die sie unter den gegebenen Umständen erreichen kann. Die Gesetze des Steigens ergeben sich nun leicht aus der folgenden Rechnung.

115.

Vermindere sich für eine ganz oder zum Theil gehemmte Vorstellung ihr Antheil an der HS., also die Ursache ihrer Hemmung, plötzlich um die Grösse Δ, und sei in Folge dieser Verminderung nach Ablauf der Zeit t von ihr wirklich gestiegen s, so dass sich ihre Hemmung um dieses Quantum vermindert hat, so wird aus denselben Gründen, die oben (§. 104.) in Bezug auf das Sinken geltend gemacht worden sind, die im nächsten Zeitelement dt ihr zukommende Vermehrung ihres Steigens, ds, bestimmt werden durch die Formel

$$ds = (\Delta - s)\,dt,$$

aus der sich sofort für die Geschwindigkeit v dieses Steigens ergiebt

$$v = \frac{ds}{dt} = \Delta - s.$$

Integrirt man die erste dieser Formeln und bemerkt, dass für $t = 0$, $s = 0$, so folgt

$$t = \lg n \frac{\Delta}{\Delta - s};$$

und hieraus $$s = \Delta(1 - e^{-t});$$

Formeln, welche denen in §. 104. vollkommen analog sind. In der That lassen sie sich diesen Formeln völlig subsumiren und dadurch entbehrlich machen. Man kann nämlich das Steigen als ein negatives Sinken, die ganze oder theilweise Befreiung von dem Antheil an der HS. als einen der gehemmten Vorstellung plötzlich zugebrachten Antheil an einer negativen HS. ansehen, wodurch die Formel $d\sigma = (S_0 - \sigma)dt$ in... $-d\sigma = (-S_0 + \sigma)dt$ übergeht, aus der, wenn $-S_0 = \Delta$, $-\sigma = s$ gesetzt wird, $ds = (\Delta - s)dt$ folgt.

Es ergiebt sich hiernach auch von selbst, dass im ersten Anfang der Zeit t das Quantum s, um welches die Vorstellung gestiegen, der Zeit t direct und einfach proportional sein, und dass s in wenig Zeiteinheiten sehr nahe, in keiner endlichen Zeit aber vollkommen gleich Δ werden wird.

In Fig. 4. stellt AO die Intensität, AQ den Rest der Vorstellung dar. Ferner ist $QQ_1 = \Delta$, daher Q_1Z_1 die statische Linie, der sich die in der Curve QMN aufsteigende Vorstellung ohne Ende nähert, und die also zu dieser Curve die Asymptote ist.

Ein Fall, der dem Sinken einer hinlänglich schwachen Vorstellung auf die Grenze des Bewusstseins in endlicher Zeit analog wäre, so dass eine Vorstellung in endlicher Zeit ganz ins Bewusstsein zurückkehren könnte, kann nicht vorkommen. Denn es giebt zwar wohl Verhältnisse der Intensitäten von drei und mehr Vorstellungen, bei denen für das Gleichgewicht eine oder mehrere ganz gehemmt sein müssen, es giebt aber keine Verhältnisse von endlichen Intensitäten, bei denen das Gleichgewicht erforderte; dass eine oder mehrere neben den andern ganz oder theilweise gehemmten völlig ungehemmt bleiben müssten.

Sechster Abschnitt.

Von den Bewegungen successiv gegebener Vorstellungen.

116.

Verwickeltere Gesetze der Bewegung der Vorstellungen ergeben sich, wenn wir die im vorigen Abschnitt zum Grunde gelegte Voraussetzung mehrer gleichzeitig gegebener Vorstellungen verlassen und annehmen, dass zwar einige bereits sich im Gleichgewicht oder nahe daran befinden, aber nun successiv neue ungehemmte, also durch äussere Wahrnehmung gegebene Vorstellungen hinzutreten. Wir werden uns, um grössere Weitläufigkeiten zu vermeiden, auf die Betrachtung von drei Vorstellungen beschränken.

Seien a und b nahe im Gleichgewicht, S ihre HS., S_1 und S_2 die Antheile, welche davon bezüglich auf a und b kommen, so dass also $S_1 + S_2 = S$ ist. Trete eine dritte, a und b entgegengesetzte Vorstellung c hinzu, so wird hierdurch die vorige HS. vermehrt und entsteht damit eine grössere HS. $= S'$, wovon nach hergestelltem Gleichgewicht S'_1 auf a, S'_2 auf b, S'_3 auf c kommen mag, so dass also $S'_1 + S'_2 + S'_3 = S'$. Es sollen die Bewegungen gefunden werden, welche nach dem Eintritt von c ins Bewusstsein die drei Vorstellungen annehmen.

Es ist also hier, wenn a, b, c nach dem Schema in §. 46. die Gegensätze m, n, p haben,

$$S_1 = \frac{bS}{a+b}; \qquad S_2 = \frac{aS}{a+b};$$

$$S'_1 = \frac{\alpha bcS'}{\gamma ab+\beta ac+\alpha bc}; \quad S'_2 = \frac{\beta acS'}{\gamma ab+\beta ac+\alpha bc}; \quad S'_3 = \frac{\gamma abS'}{\gamma ab+\beta ac+\alpha bc};$$

wo $\alpha = m+p$, $\beta = m+n$, $\gamma = n+p$.

Wir nehmen nun zuerst an, die Intensität von c und seine Gegensätze zu a und b seien so beschaffen, dass nicht nur $S' > S$, sondern auch $S'_1 > S_1$, $S'_2 > S_2$ sei, also die statischen Punkte, die a und b nach dem Zutritt von c zukommen, tiefer liegen als die, welche ihnen zuvor nur in Bezug

auf einander zukamen, und dass c grösser sei als der durch a, b bestimmte statische Grenzwerth. Alsdann müssen also a und b, um die für das Gleichgewicht erforderlichen Hemmungen zu erhalten, noch bezüglich um die Differenzen $S'_1 - S_1$, $S'_2 - S_2$ tiefer sinken. Andrerseits ist aber auch zu beachten, dass durch den Zutritt von c zunächst nur eine Vermehrung der HS. $= S' - S$ bewirkt wird, und dass diese nach den von der Stärke und den Gegensätzen der Vorstellungen abhängigen, früher bestimmten Verhältnissen sich auf a, b, c vertheilen wird. Da nun diese Verhältnisse durch S'_1, S'_2, S'_3 ausgedrückt werden, so folgt, dass, wenn wir die Antheile der drei Vorstellungen an dieser Vermehrung der HS. durch Σ_1, Σ_2, Σ_3 bezeichnen, sein wird

$$\Sigma_1 = \frac{S'_1}{S'}(S' - S); \quad \Sigma_2 = \frac{S'_2}{S'}(S' - S); \quad \Sigma_3 = \frac{S'_3}{S'}(S' - S).$$

Wären nun diese Werthe der Reihe nach gleich den Werthen

$$S'_1 - S_1, \quad S'_2 - S_2, \quad S'_3,$$

von denen die beiden ersten zu den Hemmungen S_1, S_2, welche a, b bereits haben, hinzukommen müssen, der dritte aber das von c zu Hemmende bedeutet (Alles unter der Bedingung, dass a, b, c ins Gleichgewicht kommen sollen, für welches S'_1, S'_2, S'_3 ihre erforderlichen Hemmungen sind), so würde das Sinken der drei Vorstellungen ganz einfach nach den in §. 104. gefundenen Gesetzen erfolgen, so dass, wenn σ_1, σ_2, σ_3 die Hemmungen bedeuten, welche nach Verlauf der Zeit t, vom Eintritt der Vorstellung c an gerechnet, die drei Vorstellungen a, b, c erlitten haben, sein würde

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= (S'_1 - S_1)(1 - e^{-t}) = \Sigma_1(1 - e^{-t}); \\
\sigma_2 &= (S'_2 - S_2)(1 - e^{-t}) = \Sigma_2(1 - e^{-t}); \\
\sigma_3 &= S'_3(1 - e^{-t}) \qquad\quad\;\, = \Sigma_3(1 - e^{-t}).
\end{aligned}$$

Aber diese Voraussetzung, dass $\Sigma_1 = S'_1 - S_1$, $\Sigma_2 = S'_2 - S_2$, $\Sigma_3 = S'_3$, ist unzulässig. Denn die dritte dieser Bedingungsgleichungen würde $S' - S = S'$ oder $S = 0$ fordern, was gegen die Voraussetzung ist, wonach a und b, als entgegengesetzt, eine HS. haben müssen. Die Bewegungen der Vorstellungen werden also jetzt nach andern Gesetzen erfolgen als nach denen, welche für die einfachste Voraussetzung ausreichten.

117.

Allgemein und ohne Unterscheidung der einzelnen Vorstellungen wird hier jeder derselben plötzlich ein Antheil an der durch die neu hinzutretende Vorstellung hervorgebrachten Vergrösserung der HS. auferlegt, der Σ_0 heissen mag und demjenigen Antheil S_0, den sie haben müsste, wenn sie sich auf ihrem statischen Punkte befände, nicht gleich ist. So viel die Bewegung von Σ_0 abhängt, wird sie nicht unmittelbar auf die Erreichung der statischen Punkte, also nicht unmittelbar auf die Herstellung der dem Gleichgewicht entsprechenden Hemmungen gerichtet sein; vielmehr würde die Vorstellung, wenn sie nur der von Σ_0 ausgehenden Nöthigung zur Bewegung folgte, in einem mit dem Gleichgewicht unverträglichen Maasse gehemmt werden, und daher jedenfalls eine spätere anderweite Bewegung sie dem statischen Punkte zuführen müssen. Allein es kann nicht angenommen werden, dass das Streben der Vorstellungen, sich mit einander ins Gleichgewicht zu setzen, erst anfangen sollte sich zu äussern, nachdem sie in den Zustand der grössten Abweichung vom Gleichgewicht gedrängt sind, sondern es wird sich zugleich mit der Nachgiebigkeit gegen die von der Vermehrung der HS. ausgehende Nöthigung zum Sinken auch ein Widerstreben geltend machen, dessen Grösse durch die Differenz zwischen dieser Nöthigung und derjenigen, die sie unmittelbar auf ihren statischen Punkt führen würde, ausgedrückt wird.

Sei nämlich nach Verlauf der vom Eintritt der Vergrösserung der HS. an gerechneten Zeit t von der Vorstellung wirklich gehemmt σ; sei ferner u die Hemmung, die sie in derselben Zeit erlitten haben würde, wenn sie allein unter Einfluss der von Σ_0 ausgehenden Nöthigung gesunken wäre; sei endlich w die Hemmung, die sie in der nämlichen Zeit erlitten hätte, wenn sie nur unter Einfluss der von S_0 ausgehenden Nöthigung gesunken wäre; — so nehmen wir an, dass die Vorstellung in dem nächsten Zeitelement dt der von dem Rest des zu Hemmenden $\Sigma_0 - \sigma$ ausgehenden Nöthigung zum Sinken einen der Differenz $u - w$ gleichen Widerstand entgegensetzt.

Der kurze Sinn dieser Annahme, durch den dieselbe sich zu rechtfertigen scheint, ist dieser, dass die Vorstellung in dem Maasse der von Σ_0 ausgehenden Nöthigung zum Sinken widerstrebt, in welchem diese ihrem Streben zum Gleichgewicht entgegentritt.

118.

Gemäss dieser Annahme wird nun zunächst zu setzen sein

$$d\sigma = [\Sigma_0 - \sigma - (u - w)]\,dt,$$

wo u und w Functionen von t sind. Bringen wir diese Gleichung auf die Form

$$d\sigma + \sigma dt = [\Sigma_0 - (u - w)]\,dt,$$

so ist bekanntlich das Integral

$$\sigma = e^{-t}\int e^t[\Sigma_0 - (u - w)]\,dt.$$

Nach der u und w beigelegten Bedeutung ist aber nach §. 104., (3) offenbar

$$u = \Sigma_0(1 - e^{-t}); \quad w = S_0(1 - e^{-t});$$

daher $$u - w = (\Sigma_0 - S_0)\,(1 - e^{-t}).$$

Hieraus folgt

$$\int e^t[\Sigma_0 - (u - w)]\,dt = \int(\Sigma_0 - S_0 + S_0 e^t)\,dt$$
$$= (\Sigma_0 - S_0)t + S_0 e^t + \text{Const.};$$

folglich $$\sigma = (\Sigma_0 - S_0)te^{-t} + S_0 + e^{-t}\text{Const.}$$

Da nun für $\sigma = 0$ auch $t = 0$, so wird Const. $= -S_0$. Es ist also vollständig

$$\sigma = S_0(1 - e^{-t}) + (\Sigma_0 - S_0)te^{-t}.$$

Da $\sigma = S_0(1 - e^{-t})$ das Gesetz des Sinkens dieser Vorstellung ausdrückt, welches statthaben würde, wenn $\Sigma_0 = S_0$ wäre, d. i. wenn a und b anfangs ungehemmt, folglich c gleichzeitig mit ihnen gegeben wäre, so zeigt das zweite Glied $(\Sigma_0 - S_0)te^{-t}$ die Modification des einfacheren Bewegungsgesetzes an, die eintreten muss, wenn c später als a und b ins Bewusstsein tritt.

119.

Wenden wir nun die erhaltene Formel speciell auf die in §. 116. gestellte Aufgabe an, so hat für die drei Vorstellungen a, b, c, Σ_0 der Reihe nach die Werthe von Σ_1, Σ_2, Σ_3, so wie S_0 die Werthe $S'_1 - S_1$, $S'_2 - S_2$, S'_3. Bezeichnen dann

noch σ_1, σ_2, σ_3 die Hemmungen, v_1, v_2, v_3 die Geschwindigkeiten, so ergeben sich folgende Formeln:*

$$\sigma_1 = (S'_1 - S_1)(1 - e^{-t}) + \frac{(S'S_1 - SS'_1)}{S'} te^{-t};$$

$$\sigma_2 = (S'_2 - S_2)(1 - e^{-t}) + \frac{(S'S_2 - SS'_2)}{S'} te^{-t};$$

$$\sigma_3 = \quad S'_3(1 - e^{-t}) - \frac{SS'_3}{S'} te^{-t};$$

$$v_1 = \frac{d\sigma_1}{dt} = \left[\frac{S'_1(S'-S) - (S'S_1 - SS'_1)t}{S'}\right] e^{-t};$$

$$v_2 = \frac{d\sigma_2}{dt} = \left[\frac{S'_2(S'-S) - (S'S_2 - SS'_2)t}{S'}\right] e^{-t};$$

$$v_3 = \frac{d\sigma_3}{dt} = \left[\frac{S'_3(S'-S) + SS'_3 t}{S'}\right] e^{-t}.$$

Für $t = \infty$ wird

$$\sigma_1 = S'_1 - S_1; \quad \sigma_2 = S'_2 - S_2; \quad \sigma_3 = S'_3.$$

Da dies nun die Werthe sind, welche die Hemmungen im Gleichgewicht haben müssen, so erhellt, dass auch hier dieses in keiner endlichen Zeit vollkommen, sondern nur annäherungsweise erreicht wird.

Ferner ergiebt sich für hinlänglich kleine Werthe von t

$$\sigma_1 = \frac{S'_1}{S'}(S'-S)t; \quad \sigma_2 = \frac{S'_2}{S'}(S'-S)t; \quad \sigma_3 = \frac{S'_3}{S'}(S'-S)t;$$

Werthe, die, da $S' > S$, sämmtlich positiv sind und zeigen, dass im Anfange der Bewegung alle drei Vorstellungen sinken müssen, und zwar der Zeit direct proportional.

Für die Summe der gleichzeitigen Hemmungen ergiebt sich

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = (S'-S)(1 - e^{-t}).$$

Sie ist also so gross, wie sie sein würde, wenn die Vorstellungen nach dem einfacheren Gesetz (§. 104, (3)) sinken.

Was die Geschwindigkeiten betrifft, so wird

$$v_1 = 0, \text{ für } t = \infty \text{ und } t = \frac{S'_1(S'-S)}{S'S_1 - SS'_1} = T_1;$$

---

* Sie sind zuerst aufgefunden und auf andere Weise als im Vorstehenden abgeleitet von Th. Wittstein in seiner Schrift: Neue Behandlung des mathematisch-psychologischen Problems von der Bewegung einfacher Vorstellungen, welche nach einander in die Seele eintreten. Hannover 1845. S. 18. (Vgl. Leipziger Repertorium 1845. Heft 24.)

$$v_2 = 0, \text{ für } t = \infty \text{ und } t = \frac{S'_2(S'-S)}{S'S_2-SS'_2} = T_2;$$

$$v_3 = 0, \text{ für } t = \infty \text{ und } t = \frac{-(S'-S)}{S} = T_3.$$

Unter diesen sechs Werthen von t zeigen die drei endlichen T_1, T_2, T_3 Maxima von σ_1, σ_2, σ_3 an, da, wie man unmittelbar sieht, für ein wachsendes t mit diesen Werthen v_1, v_2, v_3 aus dem Positiven ins Negative übergehen. T_1 und T_2 aber sind positiv, wenn bezüglich

$$S'S_1 - SS'_1 > 0 \text{ oder } \frac{S_1}{S} > \frac{S'_1}{S'},$$

$$S'S_2 - SS'_2 > 0 \text{ oder } \frac{S_2}{S} > \frac{S'_2}{S'}.$$

Dagegen ist T_3 immer negativ und fällt daher nie in den Zeitraum, für welchen die vorstehenden Formeln gelten; dieses dritte Maximum hat also niemals eine psychologische Bedeutung. Die Bedingungen, unter denen a und b Maxima haben, sind von einander unabhängig; daher kann die eine ein Maximum haben, indess die andre keins hat. Sie zeigen im Allgemeinen, dass diejenige der beiden Vorstellungen ein zu einem positiven t gehöriges Maximum hat, für welche der Grad, in dem sie an der vor Eintritt von c geltenden HS. S Theil nimmt, grösser ist als der Grad, in welchem sie an der spätern, nach Eintritt von c geltenden HS. S' Theil hat.

Für gleichen, aber beliebigen Gegensatz m der drei Vorstellungen wird

$$T_1 = T_2 = \frac{(a+b)c^2}{ab^2}; \quad T_3 = -\frac{c}{b};$$

also sind diese Zeitbestimmungen unabhängig vom Gegensatz, folglich für alle gleich entgegengesetzten Vorstellungen dieselben, so dass also von drei solchen Vorstellungen die beiden früheren immer in derselben Zeit ihr Maximum erreichen, mögen ihre Gegensätze grösser oder kleiner sein.

120.

Um specieller zu untersuchen, in wiefern die Bedingungen des Maximums der Hemmung der beiden Vorstellungen a, b möglich sind, ist zu bemerken, dass

$$\frac{S_1}{S} = \frac{b}{a+b}, \quad \frac{S_2}{S} = \frac{a}{a+b};$$

$$\frac{S'_1}{S'} = \frac{(m+p)bc}{(n+p)ab+(m+n)ac+(m+p)bc};$$

$$\frac{S'_2}{S'} = \frac{(m+n)ac}{(n+p)ab+(m+n)ac+(m+p)bc}.$$

Hierdurch verwandeln sich die Bedingungen des Maximums von a und b... $\frac{S_1}{S} > \frac{S'_1}{S'}$ und $\frac{S_2}{S} > \frac{S'_2}{S'}$ bezüglich in folgende:

$(n+p)b+(n-p)c>0$, oder $n(b+c)+p(b-c)>0$, für a;
$(p+n)a+(p-n)c>0$, oder $p(a+c)+n(a-c)>0$, für b.

Hieraus folgt:

I. a hat ein Maximum
  1. für jeden Werth von c, wenn $n \geqq p$;
  2. für $c < (\frac{p+n}{p-n})b$, wenn $n < p$.

II. a hat kein Maximum
  für $c \geqq (\frac{p+n}{p-n})b$, wenn $n < p$.

III. b hat ein Maximum
  1. für jeden Werth von c, wenn $n \leqq p$;
  2. für $c < (\frac{n+p}{n-p})a$, wenn $n > p$.

IV. b hat kein Maximum
  für $c \geqq (\frac{n+p}{n-p})a$, wenn $n > p$.

Hieraus folgt weiter

V. dass a und b zugleich Maxima haben
  1. für jeden Werth von c, wenn $n = p$;
  2. für $c < (\frac{p+n}{p-n})b$, wenn $n < p$;
  3. für $c < (\frac{n+p}{n-p})a$, wenn $n > p$;

VI. dass, wenn eine von beiden Vorstellungen a, b kein Maximum hat, doch immer die andre eins hat, also niemals beide zugleich kein Maximum haben.

Es ist nur eine besondre Folgerung aus V., dass, wenn c zugleich kleiner als a und als b, diese zugleich ein Maximum haben, mag $n \gtreqless p$ sein.

121.

Hat nun eine von den beiden Vorstellungen a, b kein Maximum, ist also entweder $S'S_1 - SS'_1 < 0$ oder $S'S_2 - SS'_2 < 0$, so ist nach den Formeln in §. 119. die Geschwindigkeit dieser Vorstellung immer positiv, die Vorstellung wird also ohne Ende sinken und sich ihrem statischen Punkte nähern. Es ist hierbei nicht ausser Acht zu lassen, dass nach §. 116. die Grundvoraussetzung der bisherigen Rechnung die Annahme $S'_1 > S_1$ und $S'_2 > S_2$ ist.

Findet aber für die Hemmung von a oder von b ein Maximum statt, so wird es in den §. 119. bestimmten endlichen Zeiten T_1, T_2 erreicht werden. Substituirt man deren Werthe in den Ausdrücken für σ_1, σ_2, so ergiebt sich

$$\sigma_1 = S'_1 - S_1 + \left(\frac{S'S_1 - SS'_1}{S'}\right)e^{-T_1} = H_1;$$

$$\sigma_2 = S'_2 - S_2 + \left(\frac{S'S_2 - SS'_2}{S'}\right)e^{-T_2} = H_2.$$

Die zweiten Glieder dieser Ausdrücke geben an, wie tief die Vorstellungen im Maximum unter ihre statischen Punkte gesunken sind.

Nach Erreichung des Maximum wird und bleibt die Geschwindigkeit negativ, daher steigt dann die Vorstellung und nähert sich ohne Ende ihrem statischen Punkte.

122.

Zur vollständigen Kenntniss der Bewegung der drei Vorstellungen gehört noch die Betrachtung der zweiten Differentialquotienten ihrer Hemmung. Aus den Formeln in §. 119. folgt nun

$$\frac{d^2\sigma_1}{dt^2} = -\left[\frac{S'S'_1 - 2SS'_1 + S'S_1 - (S'S_1 - SS'_1)t}{S'}\right]e^{-t};$$

$$\frac{d^2\sigma_2}{dt^2} = -\left[\frac{S'S'_2 - 2SS'_2 + S'S_2 - (S'S_2 - SS'_2)t}{S'}\right]e^{-t};$$

$$\frac{d^2\sigma_3}{dt^2} = -\left[\frac{S'S'_3 - 2SS'_3 + SS'_3\,t}{S'}\right]e^{-t}.$$

Alle drei Ausdrücke werden Null für $t = \infty$; die Bewegungscurve einer jeden der drei Vorstellungen nähert sich also ohne

Ende der Gestalt einer geraden Linie und die Bewegung in derselben der Gleichförmigkeit.

Dieselben Ausdrücke werden aber auch noch gleich Null, wenn beziehungsweise

$$t = \frac{S'_1(S'-S)}{S'S_1 - SS'_1} + 1 = T_1 + 1;$$

$$t = \frac{S'_2(S'-S)}{S'S_2 - SS'_2} + 1 = T_2 + 1;$$

$$t = -\frac{(S'-S)}{S} + 1 = T_3 + 1. \quad \text{(Vgl. §. 119.)}$$

Die Bewegungscurven der Vorstellungen a und b haben also jedenfalls Wendepunkte, wenn für a... $S'S_1 - SS'_1 > 0$, für b... $S'S_2 - SS'_2 > 0$, d. i. (§. 119.) wenn sie Maxima haben. Sie haben aber auch noch Wendepunkte, wenn diese Maxima fehlen, also $S'S_1 - SS'_1 \overline{\gtrless} 0$ und $S'S_2 - SS'_2 \overline{\gtrless} 0$, wofern nur $T_1 + 1$, $T_2 + 1$ positiv, d. i. $SS'_1 - S'S_1 > S'_1(S'-S)$ für a, $SS'_2 - S'S_2 > S'_2(S'-S)$ für b ist. Da nun die obigen Differentialquotienten sich auch in folgender Form schreiben lassen:

$$\frac{d^2\sigma_1}{dt^2} = -\left(\frac{S'S_1 - SS'_1}{S'}\right)\left[\frac{S'_1(S'-S)}{S'S_1 - SS'_1} + 1 - t\right]e^{-t};$$

$$\frac{d^2\sigma_2}{dt^2} = -\left(\frac{S'S_2 - SS'_2}{S'}\right)\left[\frac{S'_2(S'-S)}{S'S_2 - SS'_2} + 1 - t\right]e^{-t};$$

so erhellt, dass, wenn die Bewegungscurven Maxima haben, sie bis zum Wendepunkte der Abscissenaxe, zu welcher σ_1, σ_2 die Ordinaten sind, die hohle, über den Wendepunkt hinaus die erhabene Seite zukehren werden. Das Umgekehrte findet statt, wenn sie keine Maxima haben.

Was die Bewegungscurve von c betrifft, so wird sie nur dann keinen Wendepunkt haben, wenn die zugehörige Zeit $T_3 + 1$ negativ, d. i. $S' > 2S$ ist. Bis zu dem Wendepunkte aber wendet die Curve der Abscissenaxe die erhabene, über ihn hinaus die hohle Seite zu.

Hat eine der Curven keinen Wendepunkt, so unterscheidet sich ihre Gestalt von der der früheren einfachen logarithmischen Linie nur dadurch, dass ihre Ordinaten langsamer zunehmen.

Endlich können wir noch die Grösse der den Wendepunkten zugehörigen Ordinaten bestimmen, indem wir in den Aus-

drücken für σ_1, σ_2, σ_3 (§. 119.) die Werthe $t = T_1 + 1$, $T_2 + 1$, $T_3 + 1$ substituiren. Man erhält hierdurch

$$\sigma_1 = S'_1 - S_1 + 2\left(\frac{S'S_1 - SS'_1}{S'}\right)e^{-(T_1+1)} = J_1;$$

$$\sigma_2 = S'_2 - S_2 + 2\left(\frac{S'S_2 - SS'_2}{S'}\right)e^{-(T_2+1)} = J_2;$$

$$\sigma_3 = S'_3 - \frac{2SS'_3}{S'}e^{-(T_3+1)} = J_3.$$

Die beiden ersten von diesen Werthen lassen sich auch durch H_1 und H_2 ausdrücken. Es ist nämlich

$$J_1 = \frac{(e-2)\ (S'_1 - S_1) + 2H_1}{e};$$

$$J_2 = \frac{(e-2)\ (S'_2 - S_2) + 2H_2}{e}.$$

123.

Zur Erläuterung des Inhalts der vorstehenden §§. dienen theils die Figuren 5 und 6, theils die nachfolgenden Beispiele. In beiden Figuren ist QZ' die statische Linie, die a oder b vor Eintritt von c zukommt, $Q_1Z'_1$ die statische Linie, die nach Eintritt von c gilt und gemäss der Voraussetzung, dass $S'_1 > S_1$, $S'_2 > S_2$ (§. 116.), tiefer als die erstere liegt. OM stellt die Bahn dar, die a oder b bis zum Eintritt von c beschreibt und in der es der statischen Linie bis auf eine unmerkliche Entfernung nahe gekommen ist. In M findet nun eine Unterbrechung der Stetigkeit der Bewegung statt, und die Tangente der neuen Curve MM_1N in M macht mit der alten OM an demselben Punkte M einen Winkel. Hier beginnt nun für a und b ein zweites Stadium der Bewegung, das, welches allein der Gegenstand der vorstehenden Untersuchungen war. Figur 5 stellt die Bewegungscurve dar, wenn sie ein Maximum hat. Dies fällt auf M_1, so dass pp_1, je nachdem die Figur sich auf a oder b bezieht, T_1 oder T_2 (§. 119.), M_1P_1 aber bezüglich H_1 oder H_2 (§. 121.) darstellt. In M_2 hat die Curve ihren Wendepunkt, so dass also pp_2 die Zeiten $T_1 + 1$, $T_2 + 2$, M_2P_2 aber J_1, J_2 (§. 122.) darstellt. Von M bis M_2 wendet die Curve ihrer Abscissenaxe QZ' die hohle, von M_2 bis N ins Unendliche die erhabene Seite zu und nähert sich QZ' als ihrer

Asymptote. Fig. 6 stellt die Bewegungscurve dar, wenn sie kein Maximum hat. M_1 ist hier der Wendepunkt und MM_1 wendet der Axe MZ' die erhabene, M_1N die hohle Seite zu. In derselben Figur stellt der Theil MM_1N die Bewegungscurve für c dar, wenn dieselbe einen Wendepunkt hat. Die Intensität von c wird dann durch MP repräsentirt.

124.

Es folgen ein paar Zahlenbeispiele.

1. Sei $a = 5$, $b = 4$, $c = 3$, der Gegensatz für alle Vorstellungen gleich und voll; so ist $S = 4$; daher

$$S_1 = \frac{16}{9} = 1{,}778; \quad S_2 = \frac{20}{9} = 2{,}222.$$

Mögen a und b beim Eintritt von c von ihren statischen Punkten um weniger als 0,00001 entfernt sein, so ist, um die zugehörige Zeit zu bestimmen, in der Formel $\Sigma = S(1-e^{-t})$ (§. 109.) $S = 4$ und $S - \Sigma < 0{,}00001$ zu setzen und hieraus t zu bestimmen. Dies giebt

$$t > \lg n \frac{4}{0{,}00001} > 12{,}899.$$

Für $t = 12{,}9$ sind also a und b um weniger als ein Hunderttausentel der Einheit der Intensitäten von ihren statischen Punkten entfernt, also jedenfalls nach Verlauf von 13 Zeiteinheiten so gut als im Gleichgewicht. Von diesem Zeitpunkt an werden die weiteren Zeitlängen gerechnet.

Tritt nun c zu a und b hinzu, so ist die Summe des von allen dreien zusammen zu Hemmenden, wenn sie im Gleichgewicht sein sollen, $S' = 7$; daher

$$S'_1 = \frac{84}{47} = 1{,}787; \quad S'_2 = \frac{105}{47} = 2{,}234; \quad S'_3 = \frac{140}{47} = 2{,}979.$$

Nach §. 120. V. haben nun hier, da $n = p = 1$, a und b Maxima. Sie fallen auf die Zeiten (§. 119.)

$$T_1 = T_2 = 1{,}0125. \quad \text{Für } c \text{ ist } T_3 = -0{,}75.$$

Die Maxima der Hemmungen selbst sind (§. 121.)

$$H_1 = 0{,}284; \quad H_2 = 0{,}355.$$

Da nun $S'_1 - S_1 = 0{,}009$; $S'_2 - S_2 = 0{,}012$, so sind in den Maximis a und b bezüglich um 0,275 und 0,343 unter ihre neuen statischen Linien gesunken.

Was ferner die Wendepunkte betrifft, so fallen sie (§. 122.) auf die Zeiten

$$T_1 + 1 = T_2 + 1 = 2{,}0125; \quad T_3 + 1 = 0{,}25.$$

Alle drei Vorstellungen haben also Wendepunkte. Die Grösse der Hemmungen ist für sie (§. 122. a. E.)

$$J_1 = 0{,}212; \quad J_2 = 0{,}265; \quad J_3 = 0{,}595.$$

Setzen wir in den Formeln zu Anfange des §. 119. willkürlich $t = 6$, so ergiebt sich

$$\sigma_1 = 0{,}021; \quad \sigma_2 = 0{,}024; \quad \sigma_3 = 2{,}946.$$

Für das Gleichgewicht muss aber, wie wir sahen, sein

$$\sigma_1 = S'_1 - S_1 = 0{,}009; \; \sigma_2 = S'_2 - S_2 = 0{,}012; \; \sigma_3 = S'_3 = 2{,}979.$$

Nach 6 Zeiteinheiten sind also die drei Vorstellungen von ihren statischen Linien nur noch bezüglich um

$$-0{,}012, \; -0{,}012, \; +0{,}033$$

entfernt, also schon nahe im Gleichgewicht.

2. Sei, wie zuvor, $a = 5$, $b = 4$, und ihr Gegensatz $m = 1$, aber $c = 8$, und der Gegensatz zwischen a und c, $p = 1$, der zwischen b und c, $n = 0{,}3$, so findet sich die HS. $S' = pa + nb = 6{,}2$. Da ferner $\alpha = m + p = 2$; $\beta = m + n = 1{,}3$; $\gamma = n + p = 1{,}3$, so wird (§. 116.)

$$S'_1 = 2{,}794; \quad S'_2 = 2{,}270; \quad S'_3 = 1{,}135.$$

Da hier $n < p$ und $(\frac{p+n}{p-n})b = \frac{52}{7}$, also $< c$, so hat (§. 121. II.) a kein Maximum, wohl aber b (§. 121. II. 1.). Dieses Maximum fällt (§. 119.) auf die Zeit

$$T_2 = 1{,}063,$$

und ergiebt sich für diese die Grösse der Hemmung

$$H_2 = 0{,}309.$$

Da nun $S'_2 - S_2 = 0{,}048$, so ist hier b um 0,261 unter seiner statischen Linie. Die gleichzeitigen Hemmungen von a und c sind (§. 119.)

$$\sigma_1 = 0{,}774 \text{ und } \sigma_3 = 0{,}474.$$

Da a kein Maximum, so hat es auch keinen Wendepunkt. Der von b dagegen fällt auf

$T_2 + 1 = 2{,}063$, wo $J_2 = 0{,}240$. (§. 122. a. E.)

Gleichzeitig ist

$$\sigma_1 = 0{,}965; \quad \sigma_3 = 0{,}799.$$

Da $S'_1 - S_1 = 1{,}016$; $S'_2 - S_2 = 0{,}048$; $S'_3 = 1{,}135$, so sind hier die Entfernungen von den statischen Linien von a, b, c bezüglich

$$0{,}051; \quad -0{,}192; \quad 0{,}336;$$

also a, welches weder Maximum noch Wendepunkt hat, dem Gleichgewicht am nächsten, b verhältnissmässig davon am entferntesten. Der Wendepunkt von c fällt auf die Zeit

$$T_3 + 1 = 0{,}45; \text{ wo } J_3 = 0{,}201.$$

Für den willkürlich angenommenen Werth $t = 6$ wird hier

$$\sigma_1 = 1{,}013; \quad \sigma_2 = 0{,}087; \quad \sigma_3 = 1{,}109.$$

Es sind also nach 6 Zeiteinheiten die Entfernungen der Vorstellungen von ihren statischen Linien nur noch

$$0{,}003; \quad -0{,}039; \quad 0{,}023.$$

125.

In der ganzen vorstehenden Untersuchung (§. 116 ff.) wurde angenommen, dass zugleich mit $S' > S$ auch $S'_1 > S_1$, $S'_2 > S_2$ sei. Es lässt sich jedoch leicht zeigen, dass auch $S'_1 \gtreqless S_1$, $S'_2 \gtreqless S_2$ sein kann. Denn dieses angenommen, wird

$$\frac{S'_1}{S'} < \frac{S_1}{S}; \quad \frac{S'_2}{S'} < \frac{S_2}{S}.$$

Nach §. 120. I. findet aber die erste dieser Ungleichungen jederzeit statt, wenn entweder $n \geqq p$, oder wenn $n < p$, aber $c < (\frac{p+n}{p-n})b$. Eben so findet nach §. 120. III. die zweite statt, wenn entweder $n \gtreqless p$, oder wenn $n > p$, aber $c < (\frac{n+p}{n-p})a$.

Da nach §. 119. zu Anfange der Bewegung $\sigma_1 = \frac{S'_1}{S'}(S' - S)t$; $\sigma_2 = \frac{S'_2}{S'}(S' - S)t$, so werden auch dann (weil $S' > S$) anfänglich beide Vorstellungen sinken. Für beide sind aber, da $\frac{S'_1}{S'} < \frac{S_1}{S}$, $\frac{S'_2}{S'} < \frac{S_2}{S}$, Maxima des Sinkens, daher auch Wendepunkte vorhanden. Ehe sie die letzteren erreichen, kehren die Bewegungscurven ihren statischen Linien die hohle, dann die erhabene Seite zu. Nach ihrer Wiedererhebung schneiden sie ihre frühere statische Linie, da die durch den Zutritt von c gegebene statische Linie höher liegt als jene. Dies versinnlicht die Fig. 7., die einer nähern Erläuterung nicht bedarf.

Sei z. B. $a = 5$, $b = 4$, $c = 3$, $m = 1$, $n = 0{,}6$, $p = 0{,}5$, so findet sich $S' = 4{,}9$, also $> S = 4$; $S'_1 = 1{,}378$, also $< S_1 = 1{,}778$; $S'_2 = 1{,}837$, also $< S_2 = 2{,}222$; $S'_3 = 1{,}684$.

Hieraus ergiebt sich für die Maxima

$T_1 = 0{,}388$; $H_1 = 0{,}043$;

$T_2 = 0{,}466$; $H_2 = 0{,}068$; gleichzeitig $\sigma_3 = 0{,}226$.

Ferner ist für die Wendepunkte

$$T_1 + 1 = 1{,}388; \quad J_1 = -0{,}074;$$
$$T_2 + 1 = 1{,}466; \quad J_2 = -0{,}097;$$
$$T_3 + 1 = 0{,}775; \quad J_3 = 0{,}418.$$

Für $t = 6$ wird

$$\sigma_1 = -0{,}389; \quad \sigma_2 = -0{,}362; \quad \sigma_3 = 1{,}660.$$

Da nun $S'_1 - S_1 = -0{,}4$; $S'_2 - S_2 = -0{,}385$ und $S'_3 = 1{,}684$, so sind nach 6 Zeiteinheiten die Entfernungen der Vorstellungen von ihren statischen Linien noch

$$-0{,}011; \quad -0{,}023; \quad 0{,}024.$$

126.

Es fragt sich jetzt weiter, ob nicht auch $S' \gtreqless S$ sein kann.

Es ist nun zwar allgemein $S = mb$, wenn $a > b$, aber S' entweder $= mb + pc$, oder $ma + nc$, oder $pa + nb$. Dass in den beiden ersten Fällen $S' > S$, ist ohne Weiteres klar, es bleibt also nur noch der dritte Fall $S' = pa + nb$ zu untersuchen übrig.

Dieser Werth ist $=$ oder $< mb$, wenn bezüglich

$$(m - n)b = \text{oder} > pa.$$

Dies erfordert $m > n$.

Es ist aber noch nöthig in Betracht zu ziehen, unter welchen Bedingungen S' der Werth $pa + nb$ zukommt, um versichert zu sein, dass diese Bedingungen mit denen, unter welchen $S' \gtreqless S$, nicht in Widerspruch stehen.

Soll nun $pa + nb$ die HS. der Vorstellungen a, b, c darstellen, so muss sein

$pa + nb < mb + pc$, und zugleich $pa + nb < ma + nc$,

d. i. $(m - n)b > p(a - c)$ und $n(b - c) < (m - p)a$.

Ist nun 1) $c < b < a$, so muss zur Erfüllung dieser Bedingungen sein $m > n$ und $m > p$; alsdann sind sie mit der Bedingung von $S' \gtreqless S$, $(m - n)b \geqq pa$ verträglich.

Angenommen also $c < b < a$, so ist

$S' = S$, wenn $m > n$ und $> p, (m-n)b = pa$, folglich auch $> p(a-c)$, und $n(b-c) < (m-p)a$;

$S' < S$, wenn $m > n$ und $> p, (m-n)b > pa$, folglich auch $> p(a-c)$, und $n(b-c) < (m-p)a$.

Ist 2) $b < c < a$, so ist $S' = pa + nb$, wenn $(m-n)b > p(a-c)$ und $n(c-b) > (p-m)a$.

Die erste dieser Bedingungen fordert $m > n$; die zweite erfüllt sich von selbst und kommt in Wegfall, wenn $p \gtrless m$. Beide Bedingungen sind mit der von $S' \lesseqgtr S$ verträglich.

Es ist nämlich für $c < b < a$

$S' = S$, wenn $m > n$, $(m-n)b = pa$, folglich auch $> p(a-c)$, und $n(c-b) > (p-m)a$;

$S' < S$, wenn $m > n$, $(m-n)b > pa$, folglich auch $> p(a-c)$, und $n(c-b) > (p-m)a$.

Ist 3) $b < a < c$, so ist $S' = pa + nb$, wenn $(n-m)b < p(c-a)$ und $n(c-b) > (p-m)a$.

Die erste dieser Bedingungen kommt, wenn $m \geqq n$, die zweite, wenn $m \geqq p$, in Wegfall. Auch diese Bedingungen sind mit der für $S' \leqq S$ verträglich.

Es ist nämlich für $b < a < c$

$S' = S$, wenn $m > n$, $(m-n)b = pa$, folglich auch $(n-m)b < p(c-a)$, und $n(c-b) > (p-m)a$;

$S' < S_1$, wenn $m > n$, $(m-n)b > pa$, folglich auch $(n-m)b < p(c-a)$, und $n(c-b) > (p-m)a$.

Es ist also hierdurch erwiesen, dass, mag c kleiner als die kleinere oder grössere der beiden Vorstellungen a, b, oder kleiner als die grössere und grösser als die kleinere derselben sein, immer $S' \gtrless S$ sein kann.

127.

Wenn indess auch $S' < S$ ist, so folgt daraus noch nicht, dass allgemein $S'_1 < S_1$, $S'_2 < S_2$ sein müsse. Setzt man nämlich in den §. 116. angegebenen Werthen von S'_1, S'_2, S_1, S_2,... $S' = pa + np$, $S = mb$, so findet sich

$$S'_1 - S_1 = \{(m+p)(pa+nb)(a+b) - mb[(m+n)a + (m+p)b]\} c - (n+p)mabb;$$

$$S'_2 - S_2 = \{(m+n)(pa+nb)(a+b) - ma[(m+p)a + (m+p)b]\} c - (n+p)maab.$$

Für hinlänglich kleine Werthe von c werden beide Ausdrücke offenbar negativ, und ist also dann $S'_1 < S_1$, $S'_2 < S_2$. Für hinlänglich grosse Werthe von c können sie aber auch positiv werden; dann nämlich, wenn zugleich der Coëfficient von c positiv ist. Wir begnügen uns an einem Beispiel die Möglichkeit nachzuweisen.

Für $a = 6{,}8$; $b = 4$; $m = 1$; $n = 0{,}3$; $p = 0{,}4$ ergiebt sich $S'_1 - S_1 = 1{,}51 . c - 76{,}16$; $S'_2 - S_2 = -44{,}85 . c - 129{,}47$.

Ist also $c > 50{,}438$, so wird $S'_1 - S_1 > 0$, also $S'_1 > S_1$.

Sei $c = 60$, so findet sich $S' = 3{,}92$; $S'_1 = 1{,}487$; $S'_2 = 2{,}348$; $S'_3 = 0{,}084$.

Es ist aber für die angenommenen Werthe zugleich $S = 4$; $S_1 = 1{,}481$; $S_2 = 2{,}519$; also $S' < S$; $S'_1 > S_1$; $S'_2 < S_2$. Hieraus folgt weiter... $\frac{S'_1}{S'} = 0{,}379 > \frac{S_1}{S} = 0{,}370$; $\frac{S'_2}{S'} = 0{,}599 < \frac{S_2}{S} = 0{,}629$.

128.

Man könnte sich versucht fühlen, die in §. 116., unter der Voraussetzung, dass $S' > S$, abgeleiteten Formeln auch auf den vorliegenden Fall, wo $S' < S$, überzutragen. Dies würde aber auf Ungereimtheiten führen, durch die sich die Unanwendbarkeit jener Formeln verräth, die bei einigem Nachdenken von selbst einleuchtet. Dass sie, wenn $S' < S$, unbrauchbar sind, erhellt am unmittelbarsten daraus, dass, da, wie a. a. O. nachgewiesen, für den Anfang der Bewegung $\sigma_3 = \frac{S'_3}{S'}(S' - S)t$, dann die Vorstellung c, wegen $S' - S < 0$, anfangs steigen müsste, was unmöglich, da sie völlig ungehemmt ins Bewusstsein eintritt. In der That ist offenbar, dass die Verminderung der HS., $S' - S$, sich nicht, wie oben die Vermehrung, auf alle drei Vorstellungen vertheilen kann, da c schon ungehemmt ist; sie kann nur a und b zu Gute kommen. Dies lässt sich aber auch nicht so fassen, als ob a und b in Folge dieser Verminderung bis zu einem gewissen Punkte frei aufsteigen könnten, indess c ungehemmt bliebe; denn die Verminderung rührt von der neuen HS. S' her, die sich zwischen allen drei Vorstellungen bildet. Von dieser

muss daher die Betrachtung ausgehen. Sie vertheilt sich so, dass S'_1 auf a, S'_2 auf b, S'_3 auf c kommt; d. h. die Vorstellungen streben nach den hierdurch bestimmten statischen Linien. Da aber von a bereits S_1, von b... S_2 gehemmt ist, so wird für diese Vorstellungen das anfängliche Streben, ihre Hemmung zu verändern, durch $S'_1 - S_1$, $S'_2 - S_2$ ausgedrückt werden. Beide Differenzen können, eine von beiden muss negativ sein, da sie mit S'_3 zusammengenommen das negative $S' - S$ geben. Jedenfalls wird also eine von beiden Vorstellungen steigen, indess c immer sinkt. Dies wird nun ganz einfach nach den Gesetzen des §. 104. geschehen, so dass hier

$\sigma_1 = (S'_1 - S_1)(1 - e^{-t})$; $\sigma_2 = (S'_2 - S_2)(1 - e^{-t})$; $\sigma_3 = S'_3(1 - e^{-t})$; und also auch jetzt, wie in §. 119., $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \ldots\ldots$ $(S' - S)(1 - e^{-t})$. Im Beispiel des vorigen §'s wird also a sinken und b steigen.

Nach denselben Formeln erfolgen die Bewegungen, wenn $S' = S$ ist.

129.

Wenn $S' > S$, so kann die zu a und b hinzutretende Vorstellung c so schwach sein, dass ihre Intensität unter dem durch die beiden erstern bestimmten Grenzwerth liegt. Alsdann kann sie ihre statische Linie nicht erreichen, sondern verschwindet früher aus dem Bewusstsein. Es ist nämlich dann $c < S'_3$, daher mit $\sigma_3 = c$ dem Sinken von c ein Ziel gesetzt. Der Zeitpunkt, in welchem c verschwindet, wird nach der dritten Formel zu Anfange des §. 119. bestimmt durch die Gleichung

$$c = S'_3(1 - e^{-t}) - \frac{SS'_3}{S'} te^{-t},$$

oder

$$S'_3(S' + St) = (S'_3 - c)\, S'e^t.$$

Gebe diese Gleichung $t = t^0$, so giebt die Substitution dieses Werthes in den Ausdrücken für σ_1, σ_2 (a. a. O.) die Hemmungen, welche gleichzeitig mit dem Verschwinden von c auf a und b kommen und σ^0_1, σ^0_2 heissen mögen. Da nun beim Eintritt von c bereits von a und b zusammengenommen S gehemmt war, die neue HS. S' also nur eine Vermehrung der HS. $= S' - S$ herbeiführte, hiervon aber am Ende der Zeit t^0 schon

$\sigma^0_1 + \sigma^0_2 + c$ gehemmt ist, so bleibt jetzt noch ein Rest der HS., R übrig, der durch die Gleichung

$$R = S' - S - \sigma^0_1 - \sigma^0_2 - c,$$

oder, da $\sigma^0_1 + \sigma^0_2 + c = (S' - S)(1 - e^{-t^0})$, durch

$$R = (S' - S)e^{-t^0}$$

ausgedrückt wird, und den nun a und b allein zu übernehmen haben. Für das Gleichgewicht wird er sich nun nach dem Verhältniss $S_1 : S_2$ auf diese Vorstellungen vertheilen müssen, so dass $\frac{S_1 R}{S}$ auf a, $\frac{S_2 R}{S}$ auf b kommt. Allein diese Werthe sind nicht identisch mit den Antheilen, welche a und b zu dem Ende der Zeit t^0 an dem Reste der HS. wirklich erhalten. Von den vorigen Antheilen an der HS. sind nämlich dann noch die Reste

$$S'_1 - S_1 - \sigma^0_1 \text{ für } a, \quad S'_2 - S_2 - \sigma^0_2 \text{ für } b \text{ übrig.}$$

Auf beide Vorstellungen zusammen fällt jetzt plötzlich als Vermehrung des von ihnen zu Hemmenden der Rest des Antheils von c an der HS., $S'_3 - c$. Er vertheilt sich auf a und b nach dem Verhältniss $S_1 : S_2$, daher kommt zu den angegebenen Resten beziehungsweise noch hinzu

$$\frac{S_1}{S}(S'_3 - c), \quad \frac{S_2}{S}(S'_3 - c),$$

so dass von nun an, also im dritten Stadium der Bewegung von a, b (wenn die Zeit t^0 das zweite umfasst), die auf diese Vorstellungen kommenden Antheile an dem Reste der HS. bezüglich sein werden

$$S'_1 - S_1 - \sigma^0_1 + \frac{S_1}{S}(S'_3 - c) \text{ und } S'_2 - S_2 - \sigma^0_2 + \frac{S_2}{S}(S'_3 - c),$$

die zur Abkürzung R_1, R_2 heissen mögen und sich auch durch

$$R_1 = \frac{S_1 R}{S} + \frac{S_2(S'_1 - \sigma^0_1) - S_1(S'_2 - \sigma^0_2)}{S} = \frac{S_1 R}{S} + \frac{(S'_1 S_2 - S_1 S'_2)(S'_3 - c)}{SS'_3};$$

$$R_2 = \frac{S_2 R}{S} - \frac{S_2(S'_1 - \sigma^0_1) - S_1(S'_2 - \sigma^0_2)}{S} = \frac{S_2 R}{S} - \frac{(S'_1 S_2 - S_1 S'_2)(S'_3 - c)}{SS'_3};$$

ausdrücken lassen. Hieraus erhellt ihre Verschiedenheit von den a, b für das Gleichgewicht zukommenden Werthen $\frac{S_1 R}{S}$, $\frac{S_2 R}{S}$.

130.

Um aus diesen Elementen für das mit dem Verschwinden von c beginnende dritte Stadium die Bewegungen von a und

b zu bestimmen, werden wir auf die in §. 118. gefundene Formel zurückgehen. Bevor wir hierauf eingehen, mag aber bemerkt werden, dass jene Formel, die zunächst auf die Voraussetzung gegründet wurde, dass a und b im Gleichgewicht oder nahe daran seien, auch noch gilt, wenn diese Voraussetzung nicht statthat.

Gesetzt, es sei beim Eintritt von c gehemmt σ' von a, σ'' von b, so sind von den Antheilen dieser Vorstellungen an der bisherigen HS. S noch die Reste $S_1-\sigma'$, $S_2-\sigma''$ übrig. Das hinzutretende c bringt eine Vergrösserung der HS. $= S'-S$ hervor, von der auf a, b, c der Reihe nach $\frac{S'_1}{S'}(S'-S)$, $\frac{S'_2}{S'}(S'-S)$, $\frac{S'_3}{S'}(S'-S)$ kommt. Von diesen Antheilen vermehren die beiden ersten die zuvor bemerkten Reste $S_1-\sigma'$, $S_2-\sigma''$, so dass für a, b die Nöthigungen zum Sinken jetzt

$$S_1-\sigma'+\frac{S'_1}{S'}(S'-S) \text{ und } S_2-\sigma''+\frac{S'_2}{S'}(S'-S)$$

sein werden. Diese Ausdrücke sind nun Werthe, die man in §. 118. successiv Σ_0 beizulegen hat. Was aber die Werthe betrifft, die dann S_0 annehmen muss, so sind diese beziehungsweise $S'_1-\sigma'$ und $S'_2-\sigma''$.

Für die dritte Vorstellung c bleibt

$$\Sigma_0 = \frac{S'_3}{S'}(S'-S) \text{ und } S_0 = S'_3.$$

Durch Substitution dieser Werthe in der Formel a. E. des §. 118. ergeben sich nun Formeln, welche die in §. 119. als specielle unter sich enthalten und für $\sigma' = S$, $\sigma'' = S_2$ in sie übergehen; nämlich folgende:

$$\sigma_1 = (S'_1-\sigma')(1-e^{-t}) + \left(\frac{S'S_1-SS'_1}{S'}\right)te^{-t};$$

$$\sigma_2 = (S'_2-\sigma'')(1-e^{-t}) + \left(\frac{S'S_2-SS'_2}{S'}\right)te^{-t}; \text{ und bleibt}$$

$$\sigma_3 = S'_3(1-e^{-t}) - \frac{SS'_3}{S'}te^{-t}.$$

131.

Von diesen Formeln können wir nun bei unsrer vorliegenden Aufgabe keinen unmittelbaren Gebrauch machen, da hier etwas andre Voraussetzungen gegeben sind, aber wir kön-

nen in ähnlicher Weise die Formel in §. 118. anwenden, da auch hier die Vorstellungen im Moment des Verschwindens von c nicht im Gleichgewicht sind.

Das verschwindende c lässt nämlich einen Rest des von ihm zu Hemmenden $= S'_3 - c$ übrig, der sich nach dem Verhältniss von $S_1 : S_2$ auf a und b vertheilt und sie dadurch stärker als zuvor zum Sinken nöthigt. Hierdurch ergeben sich die in §. 129. bestimmten Grössen R_1, R_2. Sie sind als Werthe von Σ_0 in §. 118. anzusehen. Damit jedoch a und b ins Gleichgewicht kommen, ist von ihnen bezüglich $\frac{S_1 R}{S}$, $\frac{S_2 R}{S}$ zu hemmen, welche Grössen ebenfalls in §. 129. bestimmt wurden und Werthe von S_0 in §. 118. darstellen. Setzen wir nun zur bessern Unterscheidung von den bisher vorgekommenen Formeln für a, $\sigma = \rho_1$, für b, $\sigma = \rho_2$, überdies $t = \tau$, so ergiebt sich

$$\rho_1 = \frac{S_1 R}{S}(1 - e^{-\tau}) + (R_1 - \frac{S_1 R}{S})\tau e^{-\tau};$$

$$\rho_2 = \frac{S_2 R}{S}(1 - e^{-\tau}) + (R_2 - \frac{S_2 R}{S})\tau e^{-\tau}.$$

Das von a, b im zweiten und dritten Bewegungsstadium zusammengenommen Gehemmte beträgt also bezüglich

$$\sigma^0_1 + \frac{S_1 R}{S} = \frac{S_1}{S}(S' - S) - \frac{c(S'S_1 - SS'_1)}{SS'_3};$$

$$\sigma^0_2 + \frac{S_2 R}{S} = \frac{S_2}{S}(S' - S) - \frac{c(S'S_2 - SS'_2)}{SS'_3}.$$

Für drei Vorstellungen von gleichem Gegensatz m gehen diese Ausdrücke über in

$$\frac{-(1-m)bc}{a+b} \text{ und } \frac{-(1-m)ac}{a+b},$$

welche Ausdrücke für $m = 1$ Null werden. Ist also der Gegensatz aller drei Vorstellungen voll, so kehren a und b zu den statischen Punkten zurück, die sie beim Eintritt von c hatten; ist er aber zwar gleich, aber nur graduell, so liegen ihre neuen statischen Punkte höher als zuvor (vgl. §. 62.).

Zu bemerken ist endlich noch, dass, da für gleichen Gegensatz $S'_1 S_2 - S_1 S'_2 = 0$, also $R_1 - \frac{S_1 R}{S} = 0$, $R_2 - \frac{S_2 R}{S} = 0$, einfacher wird

$$\rho_1 = \frac{S_1 R}{S}(1 - e^{-\tau}); \quad \rho_2 = \frac{S_2 R}{S}(1 - e^{-\tau}).$$

132.

Beispielsweise sei wieder $a = 5$, $b = 4$, aber $c = 2$, der Gegensatz gleich und voll, so wird $S = 4$; $S' = 6$; daher $S_1 = 1{,}778$; $S_2 = 2{,}222$; $S'_1 = 1{,}263$; $S'_2 = 1{,}579$; $S'_3 = 3{,}158$. Die Bewegung von a und b ist wie in §. 124. Die Zeit des Verschwindens von c wird bestimmt durch die Gleichung

$$30 + 20t^0 = 11e^{t^0},$$

aus welcher $t^0 = 1{,}788$ folgt. Für diesen Werth wird

$$\sigma_1{}^0 = -0{,}149; \quad \sigma_2{}^0 = -0{,}186.$$

Die Vorstellungen haben also ihre frühere statische Linie überstiegen. Da aber $S' - S > 0$, so sind sie anfangs gesunken. Sie müssen daher ein Maximum des Sinkens erreicht haben, was auch (§. 119.) daraus folgt, dass $\frac{S'_1}{S'} < \frac{S_1}{S}$, $\frac{S'_2}{S'} < \frac{S_2}{S}$. Dies fällt in der That auf die Zeit

$$T_1 = T_2 = 0{,}45, \text{ für welche } H_1 = 0{,}082; \; H_2 = 0{,}102.$$

Setzt man in §. 119. zu Anf. $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 0$, so ergeben sich für a und b die Gleichungen, welche den Zeitpunkt bestimmen, in dem beide Vorstellungen vom Sinken zum Steigen übergehen. Diese Gleichung ist für beide gemeinschaftlich

$$11 + 20t = 11e^t$$

und giebt $t = 1{,}10$. Ihre Wendepunkte treffen auf die Zeit $T_1 + 1 = T_2 + 1 = 1{,}45$, wo $J_1 = -0{,}076$; $J_2 = -0{,}094$.

Mit $t^0 = 1{,}788$ schliesst sich das zweite Stadium der Bewegung und beginnt das dritte, in welchem die Formeln des vorigen §'s zur Anwendung kommen, und zwar, da die Vorstellungen in gleichem Gegensatz stehen, in der am Ende desselben bemerkten vereinfachten Form. In derselben wird

$$\frac{S_1 R}{S} = 0{,}149, \quad \frac{S_2 R}{S} = 0{,}186,$$

so dass $\sigma^0{}_1 + \frac{S_1 R}{S} = 0$, $\sigma^0{}_2 + \frac{S_2 R}{S} = 0$, wie es bei vollem Gegensatz sein muss. Für $t = 6$ findet sich

$$\rho_1 = 0{,}148; \quad \rho_2 = 0{,}185;$$

so dass ihr Abstand von der statischen Linie für beide nur noch 0,001 ist.

Fig. 8. stellt diese Bewegungen dar. Es ist $OQ = S_1$, oder $= S_2$, $QQ_1 = S'_1 - S_1$ oder $= S'_2 - S_2$, QP ist die Zeitlänge

des ersten, PP_1 die des zweiten Bewegungsstadiums, M_1 bezeichnet das Maximum des Sinkens, M_3 den Wendepunkt, M_4P_1 ist $= \sigma^0_1$ oder σ^0_2.

133.

In ähnlicher Weise lassen sich die Bewegungen darstellen, welche statthaben, wenn die schwächere der beiden früher gegebenen Vorstellungen, also b, unter dem durch a und c bedingten statischen Grenzwerth liegt. Es wird nicht nöthig sein, diesen Fall besonders zu entwickeln. Dagegen ist es wichtig, zu beachten, dass a oder b, ohne unter jenem Grenzwerth zu liegen, vorübergehend aus dem Bewusstsein verschwinden kann. Dieser Fall wird nämlich dann eintreten, wenn eine dieser Vorstellungen, z. B. b, sinkt und ein Maximum dieses Sinkens hat, bevor oder indem sie aber dieses Maximum erreicht, ihre Hemmung dem noch übrigen Reste gleichkommt, das Maximum also grösser oder mindestens gleich diesem Reste ist; oder in der Bezeichnung des §. 121., wenn

$$H_2 \geqq b - S_2,$$

oder, wenn für H_2 sein Werth gesetzt wird, wenn

$$\frac{S'S_2 - SS'_2}{S'} \geqq (b - S'_2)e^{T_2}$$

ist, wo

$$T_2 = \frac{S'_2(S' - S)}{S'S_2 - SS'_2}.$$

Betrachten wir zuerst den einfacheren Fall, wo $H_2 = b - S_2$, so wird in dem Zeitpunkt, wo σ_2 diesen Werth hat, die Vorstellung die Grenze des Bewusstseins nur momentan berühren. Alle Bewegungen bleiben so, wie sie im Vorigen entwickelt wurden. Die Bewegungscurve von b wird nur in ihrem Maximum die der Grenze des Bewusstseins entsprechende Gerade zur Berührenden haben. Das Neue hierbei ist nur, dass eine Vorstellung, obgleich sie grösser ist als der durch die beiden andern bestimmte statische Grenzwerth, doch bis auf die Grenze des Bewusstseins sinken kann.

Es lässt sich aber sogar zeigen, dass selbst dann noch, wenn die Intensität von c dem durch a und b bestimmten statischen Grenzwerth gleich ist, b genöthigt sein kann, nicht nur die Grenze des Bewusstseins momen-

tan zu berühren, sondern sogar eine endliche Zeit auf ihr zu verweilen.

Denn nehmen wir, um dies nur für den einfachsten Fall nachzuweisen, vollen Gegensatz an, so dass also $c = b\sqrt{\frac{a}{a+b}}$ ist, so wird dann (§. 119. a. E.) $T_1 = T_2 = 1$ die Zeit des Maximums, die also nach der Voraussetzung zugleich die des Sinkens von b auf die Grenze des Bewusstseins ist, und daher die obige Bedingung der Erreichbarkeit dieses Punktes, wenn für S_1, S_2, S, S' und S'_2 ihre bekannten Werthe gesetzt werden,

$$a^3 - 2a^2be \geqq b^3e^2,$$

oder, wenn wir $b = 1$ annehmen und für e seinen Werth 2,718 setzen,

$$a^3 - 5{,}436 . a^2 \geqq 7{,}389.$$

Diese Bedingung wird erfüllt, wenn

$$a \geqq 5{,}666, \text{ also nahe } a \geqq 5\tfrac{2}{3}$$

ist, wo dann

$$c \leqq 0{,}922, \text{ also nahe } c \leqq \frac{12}{13}$$

wird. Ist also $b = 1$, $c = \frac{12}{13}$, $a = 5\frac{2}{3}$, so wird b die Grenze des Bewusstseins momentan berühren; ist aber, bei denselben Werthen von b und c, $a > 5\frac{2}{3}$, so wird b eine endliche Zeit lang, die wir sogleich näher bestimmen werden, auf jener Grenze verweilen, also eine Zeit lang aus dem Bewusstsein verschwunden sein.

Solche Werthe, wie der von $b = 1$, wenn $a = 5\frac{2}{3}$, für welche eine zugleich mit einer oder mehreren andern im Bewusstsein sich haltende Vorstellung durch den Zutritt einer neuen Vorstellung von bestimmter Grösse momentan aus dem Bewusstsein verdrängt wird, sollen mechanische Grenzwerthe heissen.*

---

* Herbart sagt dann, die Vorstellung sinke auf die mechanische Schwelle und habe einen mechanischen Schwellenwerth. Die Unterscheidung von statischer und mechanischer Schwelle ist aber nicht recht angemessen. Denn die Schwelle (Grenze des Bewusstseins) ist in beiden Fällen dieselbe; die Vorstellung sinkt nur das eine Mal in Folge statischer, das andre Mal in Folge mechanischer Bedingungen auf diese Schwelle.

134.

Betrachten wir jetzt den andern Fall, in welchem b, **bevor** es sein Maximum H_2 erreicht, aus dem Bewusstsein verschwindet, so bleibt ein Rest seines Antheils an der HS. übrig, der $= b - S'_2$ ist. Heisse die Zeit, nach welcher dies geschieht, t^0, so wird sie dadurch bestimmt, dass in der zweiten Formel des §. 119. σ_2 gleich dem noch übrigen Reste von b, also $= b - S_2$ gesetzt wird. Dies giebt

$$(b - S'_2)e^{t^0} = (\frac{S'S_2 - SS'_2}{S'})t^0 - (S'_2 - S_2).$$

Während dieses Zeitraums t^0 sei σ^0_1 von a, σ^0_3 von c gehemmt, so ist das von allen drei Vorstellungen in den beiden ersten Bewegungsstadien zusammengenommen Gehemmte

$$S_1 + b + \sigma^0_1 + \sigma^0_3;$$

daher, wenn R den Rest der HS. bezeichnet,

$$R = S' - (S_1 + b + \sigma^0_1 + \sigma^0_3).$$

Dieser fällt aber, da b gänzlich gehemmt ist, jetzt nur a und c zur Last und wird sich so vertheilen, dass

$$\frac{cR}{a+c} = R' \text{ auf } a, \quad \frac{aR}{a+c} = R''' \text{ auf } c$$

kommt. Nun aber muss, wenn Gleichgewicht sein soll,

$$S'_1 - (S_1 + \sigma^0_1) = R_1 \text{ auf } a, \; S'_3 - \sigma^0_3 = R_3 \text{ auf } c$$

kommen. Wir werden daher die Bewegungen von a und c in dem mit dem Ende der Zeit t^0 beginnenden **dritten** Stadium, in **welchem** b **gehemmt bleibt**, nach der Formel des §. 118. zu berechnen haben, indem wir

$$\text{für } a, \; S_0 = R_1, \quad \Sigma_0 = R',$$
$$\text{für } c, \; S_0 = R_3, \quad \Sigma_0 = R'''$$

setzen. Hiernach ergiebt sich, wenn in der Zeit τ... a um ρ_1, c um ρ_3 gesunken ist,

$$\rho_1 = R_1(1 - e^{-\tau}) + (R' - R_1)\tau e^{-\tau};$$
$$\rho_3 = R_3(1 - e^{-\tau}) + (R''' - R_3)\tau e^{-\tau}.$$

Der ganzen HS., als der Summe des zu Hemmenden, wird vollständig Genüge geleistet sein, wenn

$$\rho_1 + \rho_3 = R,$$

d. i., da $R_1 + R_3 = R - S'_2 + b$ und $R' + R''' = R$, wenn

$$(b - S'_2)(e^{\tau} - \tau - 1) = R.$$

Sei τ^0 die positive Wurzel dieser Gleichung und das nach Ablauf der Zeit τ^0 von a und c Gehemmte bezüglich ρ^0_1, ρ^0_3, so ist das in allen drei Stadien zusammengenommen Gehemmte

$$\text{für } a,\ S_1 + \sigma^0_1 + \rho^0_1;$$
$$\text{für } b,\ b;$$
$$\text{für } c,\ \sigma^0_3 + \rho^0_3;$$

was, nach der Voraussetzung zusammengenommen die Summe S' geben muss.

135.

Obgleich jetzt von der HS. nichts mehr übrig ist, so sind doch die drei Vorstellungen noch nicht im Gleichgewicht, denn sie sind noch nicht auf ihren statischen Linien. Ihre theils positiven, theils negativen Entfernungen von diesen sind nämlich

$$\text{für } a,\ S'_1-(S_1 + \sigma^0_1 + \rho^0_1) = R_1-\rho^0_1;$$
$$\text{für } b,\ S'_2-b;$$
$$\text{für } c,\ S'_3-(\sigma^0_3 + \rho^0_3) = R_3-\rho^0_3.$$

Diesen Entfernungen proportional wird nun das Streben der Vorstellungen zum Gleichgewicht sein, und nichts wird, da der HS. bereits Genüge geleistet ist, sie verhindern, diesem Streben gemäss zu sinken oder zu steigen. Hierdurch ergiebt sich ein viertes Bewegungsstadium, in dem die der HS. gleiche Summe des Gehemmten unverändert bleibt und nur eine den Bedingungen des Gleichgewichts genügende Vertheilung allmälig eintritt; b muss hierbei nothwendig steigen, sich also von der Grenze des Bewusstseins wieder erheben und aufs Neue ins Bewusstsein treten. Nennen wir die Veränderungen der Hemmung der drei Vorstellungen a, b, c, welche nach Ablauf der Zeit τ' eingetreten sein werden, der Reihe nach ρ'_1, ρ'_2, ρ'_3, so wird sein

$$\rho'_1 = (R_1-\rho^0_1)(1-e^{-\tau'});$$
$$\rho'_2 = (S'_2-b)(1-e^{-\tau'});$$
$$\rho'_3 = (R_3-\rho^0_3)(1-e^{-\tau'});$$

Formeln, welche, je nachdem die constanten Coëfficienten zur Rechten positiv oder negativ sind, ein Steigen oder Sinken anzeigen, durch welches sich die Vorstellungen ohne Ende ihren statischen Linien nähern.

Es sind also in dem behandelten Falle vier Stadien der

Bewegung zu unterscheiden. Im ersten sind a und b allein im Bewusstsein und setzen sich bis auf eine unmerkliche Differenz ins Gleichgewicht. Das zweite Stadium beginnt mit dem Eintritt von c, wodurch für a, b, c neue Bedingungen des Gleichgewichts entstehen. In Folge derselben sinken alle drei Vorstellungen, bis b aus dem Bewusstsein verschwindet. Jetzt beginnt das dritte Stadium, in welchem b völlig gehemmt bleibt, a und c aber sinken, bis der HS. völlig Genüge geleistet ist. Dann hebt das vierte Stadium an, in welchem b wieder ins Bewusstsein eintritt und alle drei Vorstellungen steigend oder sinkend ihren statischen Linien ohne Ende sich nähern.

136.

Zur Erläuterung folgt ein Beispiel. Sei bei vollem Gegensatz $a = 6$; $b = 1$, so ist $S = 1$; $S_1 = 0,143$; $S_2 = 0,857$. Bestimmen wir zuerst die Zeit, nach welcher von der HS. nur noch ein Rest, der $< 0,00001$, übrig bleibt, so ist in der Formel $\Sigma = S(1-e^{-t}) \ldots . S - \Sigma < 0,00001$ zu setzen. Dies giebt

$$t > \text{lgnat}\,\frac{1}{0,00001} > 11,513.$$

Für $t > 11,6$ hat also die weitere Hemmung auf die fünf ersten Decimalstellen keinen Einfluss mehr und die Vorstellungen können als im Gleichgewicht befindlich angesehen werden.

Jetzt beginnt das zweite Stadium. Die hinzutretende Vorstellung c sei mit a und b im vollen Gegensatz; ihre Intensität $= 1$. Dann ist

$$S' = 2; \quad S'_1 = 0,154; \quad S'_2 = S'_3 = 0,923.$$

Das Maximum der Hemmung von b fällt auf die Zeit

$$T_2 = 1,167 \text{ und ist } H_2 = 0,188.$$

Da aber $b - S_2 = 0,143$, so ist $H_2 > b - S_2$; daher sinkt b früher auf die Grenze des Bewusstseins, als es sein Maximum erreicht. Zur Bestimmung des Zeitpunkts, in dem b die Grenze erreicht, dient die Gleichung

$$0,077 . e^{t^0} = 0,396 t^0 - 0,066;$$

aus welcher sich ergiebt

$$t^0 = 0,481.$$

Hieraus folgt weiter

$$\sigma^0_1 = 0,024; \quad \sigma^0_3 = 0,213;$$

daher $R = 0{,}620$; $R' = 0{,}089$; $R''' = 0{,}531$;
$R_1 = -0{,}013$; $R_3 = 0{,}710$;
woraus sich folgende Ausdrücke für ρ_1 und ρ_3 ergeben:

$$\rho_1 = -0{,}013(1-e^{-\tau}) + 0{,}102.\tau e^{-\tau};$$
$$\rho_3 = 0{,}710(1-e^{-\tau}) - 0{,}178.\tau e^{-\tau}.$$

Diese stellen die Bewegungen von *a* und *c* im dritten Stadium dar. Der Zeitpunkt, mit dem dieses schliesst, wird bestimmt durch die Gleichung

$$0{,}077(e^{\tau^0} - \tau^0 - 1) = 0{,}620;$$

welche giebt $\tau^0 = 2{,}440$.
Für diesen Werth wird

$$\rho^0_1 = 0{,}010; \quad \rho^0_3 = 0{,}610;$$

woraus endlich für das vierte Stadium folgt

$$\rho'_1 = -0{,}023(1-e^{-\tau'});$$
$$\rho'_2 = -0{,}077(1-e^{-\tau'});$$
$$\rho'_3 = 0{,}100(1-e^{-\tau'}).$$

Es sinkt also hier nur *c*, indess *a* und *b* steigen.

Fig. 9. stellt die Bewegungen von *b* im Wesentlichen dar. QP ist die Länge des ersten Stadiums, in dem *b* nahe auf die statische Linie QZ' sinkt, die ihm in Bezug auf *a* zukommt. $PP_1 = t^0$ stellt das zweite Stadium dar, in dem *b* auf die Grenze des Bewusstseins sinkt und aus diesem verschwindet; $P_1P_2 = \tau^0$ ist die Länge des dritten Stadiums, innerhalb dessen *b* völlig gehemmt bleibt und gleichsam auf der Grenze des Bewusstseins die Strecke M_1M_2 zurücklegt; P_2Z' endlich bezeichnet die unendliche Länge des vierten Stadiums, in welchem *b* sich wieder erhebt und seiner ihm in Bezug auf *a* und *c* zukommenden statischen Linie $Q_1Z'_1$ nach wenigen Zeiteinheiten schon sehr nahe kommt.

137.

Wir können endlich noch in Ueberlegung ziehen, wie sich die vorstehenden Rechnungen modificiren werden, wenn *a* und *b* beim Eintritt von *c* bereits verschmolzen sind. Es wird aber dann keine weitere Aenderung eintreten, als dass S'_1, S'_2, S'_3 nunmehr diejenigen Werthe erhalten, die in §. 93. (für x', y', z') gefunden worden sind. Welchen bedeutenden Einfluss

dies jedoch auf den einzelnen Fall haben, wie ganz anders sich dadurch die Bewegungen der Vorstellungen gestalten können, wird einleuchten, wenn wir unter dieser Voraussetzung, dass a und b verschmolzen sind, das Beispiel des vorigen §'s noch einmal in Rechnung nehmen.

Wenn $a = 6$, $b = 1$, der Gegensatz voll, so sind ihre Hemmungen im Gleichgewicht $S_1 = \frac{1}{7} = 0,143$ und $S_2 = \frac{6}{7} = 0,857$, daher ihre Reste $r = 5\frac{6}{7}$, $s = \frac{1}{7}$. Hieraus folgt (§. 93.)

$$A = a + \frac{rs}{a} = 6,139; \quad B = b + \frac{rs}{b} = 1,833.$$

Hierdurch ergiebt sich, wenn $c = 1$ und alle Gegensätze voll,

$$S' = 2; \quad S'_1 = 0,476; \quad S'_2 = 0,353; \quad S'_3 = 1,171.$$

Es erhellt sofort, dass nicht nur a und c weit stärker, als wenn a und b nicht verschmolzen sind, gehemmt werden müssen, indess b erleichtert wird, sondern auch, da $S'_3 > c$, dass jetzt c unter dem durch a und b bestimmten statischen Grenzwerth liegt, also aus dem Bewusstsein verschwinden muss. Die Berechnung der Bewegung der drei Vorstellungen wird daher zunächst nach §. 129. zu führen sein. Substituiren wir jedoch zuvor die obigen Werthe in die Formeln zu Anfange des §. 119., so erhalten wir

$$\sigma_1 = 0,333 - (0,333 + 0,095.t)e^{-t};$$
$$\sigma_2 = -0,504 + (0,504 + 0,681.t)e^{-t};$$
$$\sigma_3 = 1,171 - (1,171 + 0,585.t)e^{-t};$$
$$\frac{d\sigma_1}{dt} = (0,238 + 0,095.t)e^{-t};$$
$$\frac{d\sigma_2}{dt} = (0,157 - 0,681.t)e^{-t};$$
$$\frac{d\sigma_3}{dt} = (1,756 + 0,585.t)e^{-t}.$$

Alle drei Vorstellungen sinken also vom Anfange herein; das Sinken von b erreicht jedoch sein Maximum für

$$t = T_2 = \frac{0,157}{0,681} = 0,231;$$

für welchen Werth gefunden wird

$$\sigma_2 = H_2 = 0,037.$$

Da nun $b - S_2 = 0,143$, so sinkt jetzt b nicht mehr bis auf die Grenze des Bewusstseins, wie im vorigen §., sondern es

behauptet sich nun in demselben durch seine Verschmelzung mit *a*.

Die Zeit t^0 des Verschwindens von *c* dagegen wird bestimmt durch die Gleichung

$$0{,}585(2 + t^0) = 0{,}171 . e^{t^0},$$

aus der

$$t^0 = 2{,}799$$

folgt. Für diesen Werth findet sich

$$\sigma^0_1 = 0{,}151; \quad \sigma^0_2 = -0{,}357;$$

b hat sich also über seine erste statische Linie erhoben. Der Abstand der beiden Vorstellungen von ihren durch den Zutritt von *c* bestimmten neuen statischen Linien ist

für *a*, $S'_1 - S_1 - \sigma^0_1 = 0{,}182$; für *b*, $S'_2 - S_2 - \sigma^0_2 = -0{,}147$.

Hiernach ist nun

$$R = S' - (S + c + \sigma^0_1 + \sigma^0_2) = 0{,}206.$$

Dieser Rest ist auf *a* und *b* so zu vertheilen, dass Gleichgewicht entsteht. Dies würde jedoch nicht der Fall sein, wenn es nach dem Verhältniss $b : a$ geschähe. Denn *a* und *b* sind verschmolzen. Es muss daher an die Stelle dieses Verhältnisses ein andres treten, das hierauf die erforderliche Rücksicht nimmt. Dies lässt sich nun auf dieselbe Weise finden, wie in §. 93. für drei Vorstellungen gezeigt wurde.

Es wird nämlich die Hemmung von *a*, wie dort aus zwei Theilen x_1, x_2, und eben so die Hemmung von *b* aus zwei Theilen y_1, y_2 bestehen, zwischen welchen folgende Beziehungen stattfinden.

Sei $x_1 + y_2 = X$, $y_1 + x_2 = Y$, so ist

$$X : Y = \frac{1}{A} : \frac{1}{B};$$

$$X + Y = R;$$

daher

$$X = \frac{BR}{A+B}; \quad Y = \frac{AR}{A+B}.$$

Ferner ist zu setzen

$$x_1 = \frac{a}{A}X; \quad y_2 = \frac{rs}{aA}X; \quad y_1 = \frac{b}{B}Y; \quad x_2 = \frac{rs}{bB}Y.$$

Hieraus ergiebt sich für die Hemmung von *a*

$$x_1 + x_2 = \left(\frac{abB^2 + rsA^2}{bAB}\right)\frac{R}{A+B};$$

für die Hemmung von *b*

$$y_1 + y_2 = \left(\frac{abA^2 + rsB^2}{bAB}\right)\frac{R}{A+B}.$$

Der Rest R ist also nach dem Verhältniss

$$abB^2 + rsA^2 : abA^2 + rsB^2$$

auf a und b zu vertheilen. Im vorliegenden Beispiel giebt dies das Verhältniss 51,724 : 228,938.

Hieraus folgt

Antheil von a an $R = 0,038$; Antheil von b an $R = 0,168$, welche Werthe an die Stelle von $\frac{S_1 R}{S}$, $\frac{S_2 R}{S}$ in §. 131. treten.

Mit dem Verschwinden von c fällt aber auf a und b der übrig bleibende Rest von dem Antheil S'_3, den c an der HS. S' hatte, nämlich $S'_3 - c = 0,171$. Dieser vertheilt sich nun auf a, b nach demselben so eben bestimmten Verhältniss. Daher kommt 0,032 auf a, 0,139 auf b;

welche Werthe an die Stelle von $\frac{S_1}{S}(S'_3 - c)$, $\frac{S_2}{S}(S'_3 - c)$ in §. 131. treten. Hieraus ergiebt sich

$$R_1 = 0,214; \quad R_2 = -0,008.$$

Substituirt man nun diese Werthe und die Antheile von a und b an R in den a. a. O. für ρ_1, ρ_2 gefundenen Formeln, so wird erhalten

$$\rho_1 = 0,038(1 - e^{-\tau}) + 0,176.\tau e^{-\tau};$$

$$\rho_2 = 0,168(1 - e^{-\tau}) - 0,176.\tau e^{-\tau}.$$

Hieraus folgt weiter

$$\frac{d\rho_1}{d\tau} = (0,214 - 0,176.\tau)e^{-\tau};$$

$$\frac{d\rho_2}{d\tau} = (-0,008 + 0,176.\tau)e^{-\tau}.$$

Der erste dieser Ausdrücke zeigt, dass a sogleich, jedoch nur bis zu einem Maximum sinkt, das auf die Zeit

$$\tau = 1,216$$

fällt, für welche $\rho_1 = 0,090$.

Dann erhebt sich a wieder, und es nähert sich ρ_1 ohne Ende dem Werthe 0,038. Da

$$\frac{d^2\rho_1}{d\tau^2} = (-0,390 + 0,176.\tau)e^{-\tau},$$

so hat die Bewegungscurve für

$$\tau = 2,216$$

einen Wendepunkt, bei welchem

$$\rho_1 = 0,076.$$

Was b betrifft, so wird dieses Anfangs zwar wie zuvor fort-

fahren zu steigen, aber nur eine sehr kurze Zeit, indem es schon für

$$\tau = 0{,}045$$

sein Maximum erreicht, welches durch

$$\rho_2 = -0{,}0002$$

ausgedrückt wird. Von da ab sinkt b ununterbrochen und nähert sich ρ_2 ohne Ende dem Werthe 0,168.

Es wird also allmälig in Summe gehemmt

von a, $0{,}143 + 0{,}151 + 0{,}038 = 0{,}332$,

von b, $0{,}857 - 0{,}357 + 0{,}168 = 0{,}668$,

c ist gänzlich gehemmt, also seine Hemmung $= 1$,

was zusammengenommen die HS. $S' = 2$ giebt.

Dieselben Vorstellungen a, b, c geben, wenn die beiden ersten unverschmolzen angenommen werden, folgende allmälige Hemmungen:

für a, $0{,}143 + 0{,}024 + 0{,}010 - 0{,}023 = 0{,}154$,

für b, $0{,}857 + 0{,}143 + 0 \quad - 0{,}077 = 0{,}923$,

für c, $\quad 0{,}213 + 0{,}610 + 0{,}100 = 0{,}923$,

was ebenfalls die Summe $S' = 2$ giebt. Man sieht aus der Vergleichung, wie a durch die Verschmelzung mit b stärker belastet, dieses erleichtert, c aber, obgleich eben so stark als b, gänzlich aus dem Bewusstsein verdrängt wird.

Es wird künftig der Mühe werth sein, der Untersuchung über den Einfluss der Verschmelzung auf die in dem ganzen gegenwärtigen Abschnitt betrachteten Bewegungen der Vorstellungen ausführlich zu erörtern, was jedoch ohne tieferes Eingehen in das Detail numerischer Rechnungen nicht leicht möglich sein dürfte.

138.

Resultate.

Die Resultate der sämmtlichen in diesem Abschnitt enthaltenen Untersuchungen geben im Kleinen ein Bild von einem Theil der Vorgänge, die stattfinden, wenn unsre Gedanken durch sinnliche Wahrnehmungen gestört werden.*

* Jedoch nur von einem Theil, da überdies jede Wahrnehmung Vorstellungen reproducirt, wovon hier abgesehen wird.

Die Grösse der Intensität sowohl als der Gegensätze der durch sinnliche Wahrnehmung gegebenen Vorstellung und der Vorstellungen, die sie im Bewusstsein antrifft, sind hierbei von wesentlichem Einfluss und bringen durch ihre Verschiedenheit sehr verschiedene Erscheinungen hervor, die zum Theil unter der Benennung des Reizes der Neuheit in der empirischen Psychologie* vorkommen. Offenbar wird nämlich hier die Neuheit der Wahrnehmung durch die Gegensätze bestimmt, die sie zu den im Bewusstsein befindlichen Vorstellungen hat, so wie die Stärke des Reizes, den sie ausübt, durch ihre Intensität. Die erstere Bestimmung ist allerdings der Wirklichkeit gegenüber noch nicht erschöpfend, da eine zusammengesetzte Wahrnehmung auch in dem Sinne neu sein kann, dass unter allen in der Seele vorhandenen und durch sie reproducirten Vorstellungen keine ihr gleich oder auch nur näher ähnlich ist. Sofern wir aber von den Wirkungen der Reproduction abstrahiren, bleibt immer noch der vorstehende Begriff der Neuheit übrig und findet abgesehen von dem, was die Reproduction bewirken mag, seine Anwendung. Es liegen aber auch in diesen Störungen des Gleichgewichts der Vorstellungen schon die Keime zur Erklärung der Affecte, an welche die Depressionen oder Exaltationen, welche die störende Wahrnehmung hervorbringt, unverkennbar erinnern. Und in der That wirkt jede Störung der Gedanken durch äussere Eindrücke, wenn auch in schwachem Grade afficirend.

Durchmustern wir der Kürze und Anschaulichkeit wegen nur die ausgeführten Beispiele, so finden wir folgende wesentliche Verschiedenheiten der Erscheinungen, die, durch dieselbe Grundursache bedingt, sich allein aus der quantitativen Verschiedenheit der Data erklären.

1. Wir sahen im ersten Beispiel des §. 124., dass die durch die Wahrnehmung (*c*) hervorgebrachte Störung des Gleichgewichts der im Bewusstsein befindlichen Vorstellungen (*a*, *b*) Anfangs diese zum Sinken nöthigt, so dass diese vor jener zurückweichen und von ihr, die ursprünglich ungehemmt, also

---

* S. des Vfs. Empir. Psych. S. 80.

in vollster Klarheit, ins Bewusstsein tritt, in gewissem Grade verdunkelt werden, bald aber neue Kraft gewinnend sich wieder bis fast zur vorigen Höhe erheben und die (zur Vorstellung gewordene) störende Wahrnehmung bis auf einen kleinen Rest deprimiren und sich mit ihr ins Gleichgewicht setzen.

2. Im zweiten Beispiel desselben §'s ist die störende Wahrnehmung weit stärker und übertrifft beide Vorstellungen an Intensität, aber sie steht nur zu der stärkeren *a* in demselben vollen Gegensatz wie diese zu der schwächern *b*, zu *b* in einem mehr als dreifach geringeren. Sie ist also der einen ziemlich nahe verwandt, der andern völlig entgegengesetzt. Dennoch leidet die erstere als die schwächere durch die Störung mehr, indem sie vorübergehend unter ihre statische Linie herabgedrückt wird, über der die stärkere stets bleibt. Dagegen erfährt nach wieder hergestelltem Gleichgewicht die stärkere eine grössere dauernde Verminderung ihrer Klarheit als die schwächere, der Wahrnehmung näher verwandte; die durch die Wahrnehmung gegebene Vorstellung nimmt aber mit weit geringerem Klarheitsverlust als die älteren Vorstellungen neben diesen eine bleibende Stelle ein.

3. In §. 125. haben die drei Vorstellungen dieselben Intensitäten wie im ersten Beispiel des §. 124., aber diejenige unter ihnen, welche durch Wahrnehmung gegeben ist, steht in schwächerem Gegensatz zu den beiden andern, als diese unter sich, und zwar ist ihr Gegensatz zu der stärkeren Vorstellung der geringere. Die Folge ist, dass die Störung zwar dieselbe Form hat wie in jenem ersten Beispiel, aber nicht nur kein der Klarheit der gestörten Vorstellungen nachtheiliger Einfluss zurückbleibt, sondern diese sich sogar zu höheren Punkten erheben, als zu denen, welche sie zuvor einnahmen, indess auch von der hinzugetretenen Vorstellung ein weit grösserer Rest im Bewusstsein bleibt als im angeführten ersten Beispiel, was sich leicht daraus erklärt, dass diese neue Vorstellung, vermöge ihrer schwächeren Gegensätze, mit den älteren verträglicher ist als dort. Diese letzteren werden also hier durch die Störung aufgefrischt und durch den Contrast mit der hinzugetretenen Vorstellung dauernd gehoben.

4. Ein ähnlicher Erfolg, nämlich die Hebung einer der älteren Vorstellungen, wird nach §. 128. und 129. durch eine sehr starke Wahrnehmung von schwachen Gegensätzen zu jenen erzielt, wenn der geringere dieser Gegensätze sich auf die schwächere Vorstellung bezieht, diese also der Wahrnehmung näher verwandt ist als die andre. Aber hier hebt sich diese schwächere sogleich Anfangs und kommt der verwandten Wahrnehmung entgegen. Die stärkere dagegen sinkt allmälig, ohne jedoch eine Depression zu erleiden und verliert an Klarheit nur wenig.

5. In §. 132. ist die Wahrnehmung schwächer als in §. 124. 1., aber wie dort sind sämmtliche Gegensätze volle. Die Form der Störung ist nun zwar Anfangs dieselbe wie a. a. O., aber es folgt hier von Seiten der gestörten Vorstellungen eine Reaction, sie gerathen vorübergehend in eine Exaltation, indem sie sich über ihre anfängliche Höhe erheben, bis sie die durch die Wahrnehmung gegebene Vorstellung völlig deprimirt und dauernd in Vergessenheit gebracht haben. Dann sinken sie zu ihren ersten statischen Linien herab, und keine Spur der Störung bleibt zurück.

6. In §. 136. sind zwei ziemlich ungleiche Vorstellungen bei vollem Gegensatz im Gleichgewicht. Die störende Wahrnehmung ist der schwächern von ihnen gleich, steht aber zu beiden ebenfalls im vollen Gegensatz. Sehr bald nun verdrängt sie die schwächere Vorstellung aus dem Bewusstsein, indess sie selbst und in geringerem Maasse die stärkere Vorstellung sinkt. Mit beschleunigter Geschwindigkeit sinken von jetzt an beide; aber dies dauert nur einige Zeit. Dann erhebt sich plötzlich wieder die verdrängte schwächere der beiden älteren Vorstellungen, das Sinken der stärkeren verwandelt sich in Steigen und beide deprimiren nun gemeinschaftlich die dritte, bis sie sich mit ihr ins Gleichgewicht gesetzt haben, bei dem alle drei in denselben Klarheitsgraden im Bewusstsein bleiben, wie es geschehen würde, wenn sie gleichzeitig gegeben wären. Hier ist also die Störung so gross, dass eine Vorstellung auf einige Zeit dem Bewusstsein gänzlich entfällt, bis sie nach Verminderung des störenden Einflusses wieder Kraft zur Rückkehr gewinnt.

Es wird für die weitere Ausbildung der erklärenden Psychologie künftig von grosser Wichtigkeit sein, das, was hier nur aus einigen Beispielen abgeleitet wurde, ganz allgemein zu erörtern und die Verhältnisse der Intensitäten und Gegensätze näher zu bestimmen, bei welchen ein jeder dieser aufgezählten Fälle oder noch andre zwischen ihnen liegende eintreten. Die Vorarbeiten dazu sind aber in den allgemeinen Sätzen, zu deren Erläuterung diese Beispiele dienten, enthalten.

Siebenter Abschnitt.

Vom freien Aufsteigen gehemmter Vorstellungen.

139.

Das in §. 115. gefundene Gesetz des Steigens theilweise oder ganz gehemmter Vorstellungen hat im vorigen Abschnitt mehrere Anwendungen gefunden (vgl. 128. und 135.). Es kommt überall da in Anwendung, wo 1. eine Verminderung oder Beseitigung der Ursachen der bisherigen Hemmung plötzlich eintritt, und 2. im Laufe der aufsteigenden Bewegung keine neuen Ursachen zur Hemmung entstehen. Die Erfahrung zeigt aber Umstände, wo zwar der erste, nicht aber der zweite Theil dieser Voraussetzung statt hat. Hierher gehört namentlich das Erwachen aus dem tiefen traumlosen Schlaf, denn der leibliche Druck, der bis dahin alle Vorstellungen, wie auch ihre Intensitäten und Gegensätze beschaffen sein mochten, niedergehalten hat, weicht mit einem Male und giebt den gehemmten Vorstellungen Freiheit wieder aufzusteigen. Aber die zweite der vorerwähnten Bedingungen wird dabei nicht erfüllt. Es steigen nämlich nicht nur Vorstellungen auf, die schon zuvor im Bewusstsein zusammengetroffen sind und sich dann bis auf einen gewissen Grad gehemmt hatten, sondern es treffen durch dieses Aufsteigen andre zum erstenmal zusammen, wodurch

ganz neue Combinationen entstehen. Sofern nun solche aufsteigende Vorstellungen einander entgegengesetzt sind, muss sich zwischen ihnen eine HS. bilden, auf sie vertheilen und ihrem Steigen eine Grenze setzen. Allein da die Vorstellungen nur allmälig ins Bewusstsein treten, so kann diese HS. nicht nach ihren ganzen Intensitäten, sondern nur nach den frei gewordenen Theilen bestimmt werden, denn die Vorstellungen behindern sich nur so weit, als sie ins Bewusstsein getreten sind. Sie ist daher eine veränderliche, mit dem Freiwerden der Vorstellungen wachsende Grösse. Die HVV. dagegen bleiben unverändert, denn die Nachgiebigkeit der Vorstellungen gegen die Hemmung hängt von der Energie ab, mit der sie sich vermöge der ganzen Intensität der Thätigkeit des Vorstellens und nach den constanten Gegensätzen, die sie zu einander haben, im Bewusstsein zu behaupten vermögen. Untersuchen wir nun, welche Bewegungen sich hieraus ergeben.

140.

Seien zuvörderst nur zwei im Grade m entgegengesetzte Vorstellungen a, b gegeben, von denen a die stärkere sein mag, und habe sich nach der Zeit t, vom Moment ihrer Befreiung an gerechnet, s' von a, s'' von b erhoben, so wird $s' > s''$ sein. Denn stiegen a und b, ohne dass sich zwischen ihnen eine HS. bildete, so wäre, da sie zuvor gänzlich gehemmt waren, also in der Formel für s in §. 115. dann Δ bezüglich a und b gleich zu setzen wäre, $s' = a(1-e^{-t})$, $s'' = b(1-e^{-t})$, also, da $a > b$, für denselben Werth von t auch $s' > s''$. Dies gilt aber unter den vorliegenden Umständen nicht weniger, denn von der sich bildenden HS. wird ein grösserer Antheil auf das schwächere b als auf das stärkere a kommen und jenes daher langsamer frei werden. Bei dem Gegensatze m ist daher die veränderliche HS. am Ende der Zeit $t = ms''$ zu setzen. Hiervon wird den angenommenen Grundsätzen gemäss $\frac{mbs''}{a+b}$ auf a, $\frac{mas''}{a+b}$ auf b kommen. Da nun das Streben der Vorstellungen aufzusteigen nicht grösser sein kann als ihre Intensitäten, die eben im völlig gehemmten Zustand ganz in dieses Streben um-

gewandelt waren, diesem Streben aber jetzt schon durch die freigewordenen Quantitäten s', s'' zum Theil Genüge geschehen ist, so ist am Ende der Zeit t das wirksame Streben aufzusteigen, oder, wie wir es kürzer nennen wollen, das Aufstreben der Vorstellungen nur noch $a-s'$, $b-s''$. Es wird jedoch durch die eben bestimmten, zum Sinken antreibenden Antheile an der HS., $\frac{mbs''}{a+b}$, $\frac{mas''}{a+b}$ vermindert. Setzen wir nun zur Abkürzung

$1+\frac{ma}{a+b}=k$, also $\frac{ma}{a+b}=k-1$, folglich $\frac{mb}{a+b}=\frac{a}{b}(k-1)$,

so ergeben sich hieraus für das Ende der Zeit t folgende Ausdrücke der Geschwindigkeiten des Aufsteigens von a und b:

$$\frac{ds'}{dt}=a-s'-(k-1)\frac{bs''}{a};$$

$$\frac{ds''}{dt}=b-ks''.$$

Die zweite dieser Formeln lässt sich sofort integriren und giebt, wenn die Constante so bestimmt wird, dass für $s''=0$ auch $t=0$,

$$s''=\frac{b}{k}(1-e^{-kt}).$$

Der ersten lässt sich die Form

$$ds'+s'dt=[a-(k-1)\frac{bs''}{a}]dt$$

geben, woraus folgt

$$s'=e^{-t}\int[a-(k-1)\frac{bs''}{a}]e^{t}dt.$$

Substituirt man hierin den zuvor gefundenen Ausdruck von s'' und bemerkt, dass für $s'=0$ auch $t=0$ ist, so ergiebt sich nach gehöriger Reduction

$$s'=(a-\frac{b^2}{a})(1-e^{-t})+\frac{b^2}{ka}(1-e^{-kt}).$$

Entwickelt man diese Ausdrücke für s' und s'' in Reihen und nimmt t so klein an, dass die zweiten und höhern Potenzen davon vernachlässigt werden können, so erhält man

$$s'=at;\quad s''=bt.$$

Im ersten Anfange der Bewegung ist also die Erhebung der Vorstellungen der Zeit direct und einfach proportional.

141.

Aus den gefundenen Formeln für s' und s'' folgt weiter

$$\frac{ds'}{dt} = \left[\frac{b^2}{a} + \left(a - \frac{b^2}{a}\right)e^{(k-1)t}\right]e^{-kt};$$
$$\frac{ds''}{dt} = be^{-kt}.$$

Beide Ausdrücke werden niemals negativ. Vom zweiten erhellt dies unmittelbar; aber auch von dem ersten, wenn man bemerkt, dass der Inhalt der Parenthese zur Rechten des Gleichheitszeichens, da $b < a$, stets positiv ist. Beide Ausdrücke nehmen übrigens, wenn t ins Unendliche wächst, ohne Ende und bis zur Null ab. Es steigen also a und b zwar immer langsamer, aber ununterbrochen bis zu den höchsten Grenzen, die sie erreichen können. Bezeichnen wir diese mit a' für a, mit b' für b, so ergiebt sich, wenn wir in den Ausdrücken für s', s'', $t = \infty$ setzen,

$$a' = a - \frac{b^2}{a} + \frac{b^2}{ka} = a - \frac{mbb}{(1+m)a+b};$$
$$b' = \frac{b}{k} = \ldots\ldots\ldots b - \frac{mab}{(1+m)a+b}.$$

Auf dieser Höhe befinden sich nun a und b im Gleichgewicht. Sie erreichen sie nie vollständig, kommen ihr aber bald sehr nahe.

Da, wenn a und b nach dem Gesetz des §. 115. aufsteigen könnten, $\frac{ds'}{dt} = ae^{-t}$, $\frac{ds''}{dt} = be^{-t}$ sein würde, im vorliegenden Falle aber $\frac{ds'}{dt}$ sich auch durch $ae^{-t} - \frac{b^2}{a}(e^{-t} - e^{-kt})$ ausdrücken lässt, und $k > 1$ ist, so erhellt, dass sie langsamer aufsteigen, als es nach jenem einfacheren Gesetz geschehen würde. Im Allgemeinen sind aber ihre Bewegungscurven, die keine Wendepunkte haben, denen ähnlich, die sie in jenem Falle beschreiben würden.

Wären dieselben Vorstellungen durch eine äussere Wahrnehmung ins Bewusstsein gekommen und also Anfangs ungehemmt gewesen, so würden im Gleichgewicht von ihnen noch folgende Reste übrig sein:

$$a - \frac{mbb}{a+b} \text{ von } a; \quad b - \frac{mab}{a+b} \text{ von } b.$$

Die Vergleichung mit a', b' zeigt, dass sie kleiner sind als die Werthe von diesen. Wenn also zwei entgegengesetzte, bis dahin gänzlich gehemmt gewesene Vorstellungen

von aller Hemmung befreit gleichzeitig aufsteigen und nun zum erstenmal im Bewusstsein zusammentreffen, so erreichen sie, wenn sie ins Gleichgewicht gekommen sind, eine grössere Höhe als diejenige, auf welcher sie sich neben einander behaupten würden, wenn sie durch äussere Wahrnehmung ins Bewusstsein getreten und durch Sinken ins Gleichgewicht gekommen wären.

Die Hemmungen, welche für beide Vorstellungen übrig bleiben, sind offenbar $\frac{mbb}{(1+m)a+b}$ und $\frac{mab}{(1+m)a+b}$. Sie verhalten sich, wie $b:a$, entsprechend dem angenommenen Vertheilungsgrundsatz. Ihre Summe aber ist $\frac{mb(a+b)}{(1+m)a+b}$, also kleiner als die gewöhnliche HS., was sich nach dem Vorstehenden von selbst versteht. Auch ergiebt sich

$$a'-b' = a-b+\frac{mb(a-b)}{(1+m)a+b},$$

indess die Differenz der Reste derselben Vorstellungen, wenn sie durch Sinken ins Gleichgewicht gekommen wären,

$$a-b+\frac{mb(a-b)}{a+b},$$

also grösser sein würde. Die Höhen, zu welchen sich gleichzeitig aufsteigende entgegengesetzte Vorstellungen erheben, sind also weniger ungleich als die Reste, zu denen sie aus dem ungehemmten Zustand herabsinken würden.

142.

Hieraus geht nun hervor, dass zwei entgegengesetzte Vorstellungen, wenn sie aus dem Innern der Seele aufsteigen, sich gegen einander verträglicher verhalten, als wenn sie von Aussen her gegeben sind. Gilt dieser Satz allgemein, so weist er darauf hin, dass Objecte der innern Wahrnehmung, bei gleichem Gegensatz ihres Inhaltes wie Objecte der äussern Wahrnehmung, einander doch nicht so schroff zurückstossen wie diese, dass blosse Gedanken von entgegengesetzter Beschaffenheit weniger unverträglich erscheinen als ebenso entgegengesetzte Thatsachen der äussern Erfahrung; dass in der Phantasie Manches sich nicht so un-

vereinbar ausnimmt wie in der Wirklichkeit. «In der Gedankenwelt», sagt Herbart,* «stossen sich die Dinge lange nicht so arg als in der wirklichen. Die Gedankenwelt behält immer etwas Phantastisches, Mährchenhaftes, ja Traumähnliches im Vergleich gegen das Harte, Strenge, Schroffe der äussern Erfahrung.» Es liegt aber in dem obigen Satze noch diese Wahrheit, dass Gedanken, die sich von Innen heraus entwickeln, zu grösserer bleibender (durch das Gleichgewicht bedingter) Klarheit gelangen als solche, die uns von Aussen her zukommen. — Der Grund dieses Unterschiedes im Verhalten von sinkenden und von frei aufsteigenden Vorstellungen liegt übrigens darin, dass bei den letztern nicht das ganze Quantum des Entgegengesetzten, bei den ersteren nicht das ganze der Intensität gleiche Widerstreben gegen die Hemmung, dessen die Vorstellungen fähig sind, zur Wirksamkeit kommt.

143.

Werde jetzt die aufsteigende Bewegung von drei einander im gleichen Grade m entgegengesetzten Vorstellungen, $a > b > c$, untersucht.

Seien die nach der Zeit t frei gewordenen Quantitäten derselben der Reihe nach s', s'', s''', so wird sich eine HS. $= m\,(s'' + s''')$ gebildet haben, wovon

$$\frac{mbc\,(s''+s''')}{ab+ac+bc},\quad \frac{mac\,(s''+s''')}{ab+ac+bc},\quad \frac{mab\,(s''+s''')}{ab+ac+bc},$$

die Antheile sind, die bezüglich auf a, b, c kommen. Hieraus ergeben sich für die Geschwindigkeiten, mit denen diese Vorstellungen jetzt aufstreben, die Ausdrücke

$$\frac{ds'}{dt} = a - s' - \frac{mbc\,(s''+s''')}{ab+ac+bc};$$

$$\frac{ds''}{dt} = b - s'' - \frac{mac\,(s''+s''')}{ab+ac+bc};$$

$$\frac{ds'''}{dt} = c - s''' - \frac{mab\,(s''+s''')}{ab+ac+bc}.$$

Addirt man die beiden letzten dieser drei Gleichungen und setzt zur Abkürzung

---

* Psychologische Untersuchungen, Heft 2. S. 42.

$$1 + \frac{ma(b+c)}{ab+ac+bc} = \lambda,$$

so ergiebt sich

$$\frac{d(s''+s''')}{dt} = b + c - \lambda(s''+s''').$$

Hieraus folgt durch Integration, da für $t=0$ auch $s''=s'''=0$ ist,

$$-\lambda t = \lg n \frac{b+c-\lambda(s''+s''')}{b+c};$$

folglich

$$s''+s''' = (\frac{b+c}{\lambda})(1-e^{-\lambda t}).$$

Substituirt man diesen Ausdruck in den Gleichungen für $\frac{ds'}{dt}$, $\frac{ds''}{dt}$, $\frac{ds'''}{dt}$, so enthalten diese beziehungsweise nur noch die Grössen s' und t, s'' und t, s''' und t; daher nun ihre Integration vollzogen werden kann. Setzen wir nämlich zur Abkürzung $\frac{bc}{ab+ac+bc} = q$, so nimmt die erste dieser Gleichungen die Gestalt

$$ds' + s'dt = [a - mq(\frac{b+c}{\lambda})(1-e^{-\lambda t})]dt$$

an, woraus sich, da für $t = 0$, $s' = 0$, ergiebt

$$s' = [a - mq(\frac{b+c}{\lambda})](1-e^{-t}) - \frac{mq(b+c)}{\lambda(\lambda-1)}(e^{-\lambda t} - e^{-t}).$$

Nun ist aber

$$\frac{mq(b+c)}{(\lambda-1)} = \frac{bc}{a};$$

und

$$\frac{mq(b+c)}{\lambda} = \frac{mq(b+c)}{\lambda-1}(\frac{\lambda-1}{\lambda}) = \frac{bc}{a} - \frac{bc}{\lambda a};$$

daher

$$s' = (a - \frac{bc}{a})(1-e^{-t}) + \frac{bc}{\lambda a}(1-e^{-\lambda t});$$

und durch ähnliche Behandlung

$$s'' = (b-c)(1-e^{-t}) + \frac{c}{\lambda}(1-e^{-\lambda t});$$

$$s''' = -(b-c)(1-e^{-t}) + \frac{b}{\lambda}(1-e^{-\lambda t}).$$

144.

Hieraus ergeben sich unmittelbar durch Differentiation die Geschwindigkeiten des Aufsteigens als Functionen der Zeit in folgenden Ausdrücken:

$$\frac{ds'}{dt} = (a - \frac{bc}{a})e^{-t} + \frac{bc}{a}e^{-\lambda t};$$

$$\frac{ds''}{dt} = (b-c)e^{-t} + ce^{-\lambda t};$$

$$\frac{ds'''}{dt} = -(b-c)e^{-t} + be^{-\lambda t}.$$

Diese Ausdrücke erhalten für $t = 0$ bezüglich die Werthe a, b, c; für $t = \infty$ werden sie Null. Die beiden ersten sind, da $a > b > c$, stets positiv; daher steigen a und b ununterbrochen; auch haben, wie man leicht sieht, ihre Bewegungscurven keine Wendepunkte. Der dritte Ausdruck wird jedoch auch Null, wenn

$$t = \frac{1}{\lambda - 1} \lg n \frac{b}{b - c};$$

offenbar ein Werth, der immer reell und positiv ist, und bei dem $\frac{ds'''}{dt}$ aus dem Positiven ins Negative übergeht. Er zeigt daher ein Maximum von s''' an, für welches, wenn wir es durch H bezeichnen, sich folgender Werth findet:

$$H = \frac{b}{\lambda} - (b-c)[1 - (\frac{\lambda - 1}{\lambda})(\frac{b-c}{b})^{\frac{1}{\lambda - 1}}].$$

Nach Erreichung dieses Maximums sinkt c bis auf eine sogleich näher zu bestimmende Grenze herab. Zwischen dieser Grenze und dem Maximum liegt jedoch ein Wendepunkt, der auf die Zeit

$$t = \frac{1}{\lambda - 1} \lg n \frac{\lambda b}{b - c} = \frac{1}{\lambda - 1} \lg n \frac{b}{b - c} + \frac{1}{\lambda - 1} \lg n \lambda$$

trifft, und für welche, wenn wir den zugehörigen Werth von s''' durch J bezeichnen, wird

$$J = \frac{b}{\lambda} - (b-c)[1 - (\frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2})(\frac{b-c}{\lambda b})^{\frac{1}{\lambda - 1}}].$$

Construirt man also die Bewegungscurve in der früheren Weise. so kehrt diese vor dem Wendepunkte der Grenze des Bewusstseins die hohle, dann aber die erhabene Seite zu, indess die zu a und b gehörigen Curven der genannten Linie immer die hohle Seite zuwenden.

Dass auch hier das Aufsteigen langsamer vor sich geht als nach dem Gesetz in §. 115., folgt auf dieselbe Weise, wie dies in §. 141. für zwei Vorstellungen gezeigt ist.

145.

Wenn t ins Unendliche wächst, so nähern sich s', s'', s''' Grenzen, welche durch a'', b'', c'' bezeichnet werden mögen, und mit deren Erreichung sich die drei Vorstellungen erst völlig im Gleichgewicht befinden. Diese Grenzen sind, wie sich ergiebt, wenn in den Formeln a. E. des §. 143. $t = \infty$ gesetzt wird, folgende:

$$a'' = a - \left(\frac{\lambda - 1}{\lambda}\right)\frac{bc}{a} = a - \frac{mbc(b+c)}{(1+m)a(b+c)+bc};$$

$$b'' = b - \left(\frac{\lambda - 1}{\lambda}\right)c = b - \frac{mac(b+c)}{(1+m)a(b+c)+bc};$$

$$c'' = c - \left(\frac{\lambda - 1}{\lambda}\right)b = c - \frac{mab(b+c)}{(1+m)a(b+c)+bc}.$$

Wären dieselben Vorstellungen aus dem ungehemmten Zustand durch Sinken ins Gleichgewicht gekommen, so würden ihre Reste sein

$$a - \frac{mbc(b+c)}{a(b+c)+bc}, \quad b - \frac{mac(b+c)}{a(b+c)+bc}, \quad c - \frac{mab(b+c)}{a(b+c)+bc};$$

also offenbar kleiner als a'', b'', c''.

Es ist ferner

$$a'' - b'' = a - b + \frac{mc(a-b)(b+c)}{(1+m)a(b+c)+bc};$$

$$a'' - c'' = a - c + \frac{mb(a-c)(b+c)}{(1+m)a(b+c)+bc};$$

$$b'' - c'' = b - c + \frac{ma(b-c)(b+c)}{(1+m)a(b+c)+bc};$$

indess die Differenzen der Reste der nämlichen Vorstellungen, wenn sie durch Sinken ins Gleichgewicht kommen, sind

$$a - b + \frac{mc(a-b)(b+c)}{a(b+c)+bc};$$

$$a - c + \frac{mb(a-c)(b+c)}{a(b+c)+bc};$$

$$b - c + \frac{ma(b-c)(b+c)}{a(b+c)+bc};$$

also kleiner als die vorstehenden Werthe von $a''-b''$, $a''-c''$, $b''-c''$. Hiernach gelten also die in §. 141. für zwei Vorstellungen gefundenen Sätze auch für drei gleich entgegengesetzte Vorstellungen.

Die Summe der Hemmungen endlich, die im Gleichgewicht übrig bleiben, ist $\frac{m[a(b+c)+bc](b+c)}{(1+m)a(b+c)+bc}$; offenbar, wie es sein muss, kleiner als die gewöhnliche HS. $b+c$.

146.

Es folgt ein Beispiel. Sei $a = 5$, $b = 4$, $c = 3$, $m = 1$; so ergiebt sich $\lambda = 1{,}745$; daher wird

$$s' = 2{,}6(1-e^{-t}) + 1{,}376(1-e^{-1{,}745.t});$$
$$s'' = 1-e^{-t} + 1{,}720(1-e^{-1{,}745.t});$$
$$s''' = -(1-e^{-t}) + 2{,}293(1-e^{-1{,}745.t}).$$

Für die Zeit des Maximums des Steigens von c findet sich

$$t = 1{,}314 \lg n\, 4 = 1{,}822;$$

für das Maximum selbst

$$H = 1{,}359.$$

Der Wendepunkt fällt auf die Zeit

$$t = 2{,}569,$$
$$\text{wo } J = 1{,}342.$$

Ferner wird

$$a'' = 3{,}976; \quad b'' = 2{,}720; \quad c'' = 1{,}293;$$

indess für sinkende Vorstellungen derselben Intensität die Reste sein würden 3,213; 1,766; 0,021.

Hieraus folgen die Differenzen von a'', b'', c''

$$a''-b'' = 1{,}256; \quad a''-c'' = 2{,}683; \quad b''-c'' = 1{,}427;$$

indess die Differenzen für ins Gleichgewicht gesunkene Vorstellungen 1,447; 3,192; 1,745 sein würden. Die Summe aller Hemmungen endlich beträgt nur 4,774, indess beim Sinken die HS. = 7 ist. Für

$$t = 5 \text{ ist } s' = 3{,}958; \quad s'' = 2{,}713; \quad s''' = 1{,}300;$$

daher $a''-s' = 0{,}018$; $b''-s'' = 0{,}007$; $c''-s''' = -0{,}007$.
Zu derselben Zeit würde von denselben Vorstellungen, wenn sie gesunken wären, gehemmt sein

3,190; 1,754; 0,021.

Die Entfernungen derselben von ihren statischen Linien würden also betragen 0,023; 0,012; 0,000.

Aus allen diesen Resultaten erhellt, wie bedeutend der Unterschied zwischen dem durch freies Aufsteigen und durch Sinken erreichten Gleichgewicht ist.

147.

Der Grenzwerth c'' für die Erhebung von c wird $\gtreqless 0$, je nachdem

$$c^2[(1+m)a+b]+abc \gtreqless mab^2;$$

d. i.

$$c \gtreqless \frac{-ab+b\sqrt{(1+2m)^2a^2+4mab}}{2[(1+m)a+b]};$$

wo das Minuszeichen vor der Wurzelgrösse weggelassen ist,

weil c nicht negativ sein kann. Ist nun c gleich oder kleiner als dieser Werth, so muss es aus dem Bewusstsein verschwinden, bevor es seine statische Linie erreicht. Hierdurch ergiebt sich eine zweite Art von statischen Grenzwerthen, die für frei aufsteigende Vorstellungen gilt, wie die frühere für sinkende. Da aus den Formeln für a'', b'' (§. 145.) allgemein erhellt, dass diese Grössen stets positiv sind und nie Null werden können, so versteht sich hier von selbst, dass keine der beiden andern Vorstellungen, a, b, weder allein noch mit c zugleich aus dem Bewusstsein verschwinden können. Da für

$$c'' = 0, \quad \frac{m(b+c)}{(1+m)a(b+c)+bc} = \frac{c}{ab},$$

so folgt, dass dann

$$a'' = a - \frac{cc}{a}; \quad b'' = b - \frac{cc}{b}.$$

Wären a und b allein frei aufgestiegen, so hätten sie sich im Gleichgewicht (§. 141.) erhoben bis zu den Grenzen

$$a' = a - \frac{mbb}{(1+m)a+b}; \quad b' = b - \frac{mab}{(1+m)a+b}.$$

Es ist also, wenn c den statischen Grenzwerth der zweiten Art hat, $a'' > a'$, $b'' > b'$, sofern

$$c^2[(1+m)a+b] < mab^2;$$

oder

$$c < b\sqrt{\frac{ma}{(1+m)a+b}}.$$

Nun ist aber, wenn c den statischen Grenzwerth hat, nach dem Obigen,

$$c^2[(1+m)a+b] = mab^2 - abc, \text{ also} < mab^2;$$

es bleiben also von a und b, wenn sie zugleich mit c aufsteigen, grössere Quantitäten im Bewusstsein, als wenn sie ohne dieses, vorausgesetzt, dass es den statischen Grenzwerth hat, aufgestiegen wären.

148.

Dieser Satz lässt sich leicht verallgemeinern. Untersucht man nämlich überhaupt, unter welchen Bedingungen die Werthe von a'', b'' in §. 145. grösser, gleich oder kleiner sind als die Werthe von a', b' in §. 141., so findet sich, dass $a'' \gtreqless a'$ und zugleich $b'' \gtreqless b'$, je nachdem

$$c \lesseqgtr b\sqrt{\frac{(1+m)a}{(1+m)a+b}},$$

welcher Werth $> b\sqrt{\frac{ma}{(1+m)a+b}}$, im vorigen §. Nicht nur also, wenn c den statischen Grenzwerth hat, sondern auch für alle Werthe von c, welche $\leqq b\sqrt{\frac{(1+m)a}{(1+m)a+b}}$ sind, wird $a'' \geqq a'$ und $b'' \geqq a'$ sein. Dieser Werth nähert sich, wenn m bis zur Null abnimmt, ohne Ende dem statischen Grenzwerth der ersten Art $b\sqrt{\frac{a}{a+b}}$ für vollen Gegensatz.

Vergleichen wir endlich den neuen statischen Grenzwerth von c

$$\frac{-ab+b\sqrt{(1+2m)^2a^2+4mab}}{2[(1+m)a+b]}$$

mit dem ältern für drei gleich entgegengesetzte, durch Sinken ins Gleichgewicht kommende Vorstellungen (§. 60. (1)), nämlich

$$\frac{-(1-m)ab+b\sqrt{(1+m)^2a^2+4mab}}{2(a+b)},$$

so findet sich leicht, dass dieser letztere Werth jederzeit der grössere ist. Eine Vorstellung kann sich also beim freien Aufsteigen neben zwei stärkeren ihr und unter einander gleich entgegengesetzten Vorstellungen noch auf die Dauer im Bewusstsein behaupten, indess sie beim Sinken aus dem ungehemmten Zustand ins Gleichgewicht aus dem Bewusstsein verschwinden müsste.

Dieser Satz befindet sich in Uebereinstimmung mit den in §. 141. und §. 145. gefundenen Resultaten.

Wächst a ins Unendliche, so nähert sich der neue statische Grenzwerth ohne Ende dem Werthe $\frac{mb}{1+m}$, der alte dem Werthe mb.

149.

Zur nähern Vergleichung der neuen statischen Grenzwerthe mit den älteren für sinkende Vorstellungen mag die folgende Tabelle dienen, welche der in §. 63. correspondirt, und in welcher, wie man von selbst sieht, $a-a''$, $b-b''$ die Hemmungen bedeuten, welche im Gleichgewicht übrig bleiben.

b	m	a	c	$a-a''$	$b-b''$	a''	b''
10	1	10	4,34	1,88	1,88	8,12	8,12
		15	4,53	1,37	2,06	13,63	7,94
		40	4,81	0,58	2,31	39,42	7,69
	0,7	10	3,57	1,27	1,27	8,73	8,73
		15	3,72	0,92	1,39	14,08	8,61
		40	3,95	0,39	1,55	39,61	8,45
	0,5	10	2,90	0,84	0,84	9,16	9,16
		15	3,01	0,60	0,91	14,40	9,09
		40	3,20	0,26	1,02	39,74	8,98
	0,3	10	2,04	0,41	0,41	9,59	9,59
		15	2,12	0,30	0,45	14,70	9,55
		40	2,23	0,12	0,50	39,88	9,50

Auch hier folgt eine zweite Tabelle, welche die Quantitäten a', b' angiebt, die von a und b frei werden, wenn sie allein, ohne c, im Bewusstsein aufsteigen, und die Hemmungen $a-a'$, $b-b'$, die ihnen dann im Gleichgewicht zukommen.

b	m	a	$a-a'$	$b-b'$	a'	b'
10	1	10	3,33	3,33	6,67	6,67
		15	2,50	3,75	12,50	6,25
		40	1,11	4,44	38,89	5,56
	0,7	10	2,59	2,59	7,41	7,41
		15	1,97	2,96	13,03	7,04
		40	0,89	3,59	39,11	6,41
	0,5	10	2,00	2,00	8,00	8,00
		15	1,54	2,31	13,46	7,69
		40	0,71	2,86	39,29	7,14
	0,3	10	1,30	1,30	8,70	8,70
		15	1,02	1,53	13,98	8,47
		40	0,48	1,94	39,52	8,06

150.

Die nächste Aufgabe ist jetzt, die Zeit zu bestimmen, nach welcher c, wenn es unter seinem statischen Grenzwerth liegt, aus dem Bewusstsein verschwindet. Zu diesem Zwecke ist in der letzten Formel des §. 143. $s''' = 0$ zu setzen, woraus sich ergiebt

$$\left(b-c-\frac{b}{\lambda}\right)e^{\lambda t}-(b-c)\,e^{(\lambda-1)t}+\frac{b}{\lambda}=0.$$

Da $\lambda = 1 + \frac{ma(b+c)}{ab+ac+bc}$ (§. 143.), so werde es von jetzt an durch $1 + \frac{\mu}{\nu}$ ausgedrückt. Dann wird $e^{\lambda t} = e^t . e^{\frac{\mu t}{\nu}}$ und ..... $e^{(\lambda-1)t} = e^{\frac{\mu t}{\nu}}$. Setzen wir nun $e^{\frac{t}{\nu}} = w$ oder $t = \nu \lg n\, w$, so wird $e^{\lambda t} = w^{\mu+\nu}$ und $e^{(\lambda-1)t} = w^{\mu}$. Sei ferner zur Abkürzung

$$\frac{\lambda(b-c)}{\lambda(b-c)-b} = \frac{(\mu+\nu)(b-c)}{(\mu+\nu)(b-c)-\nu b} = A,$$

folglich $$\frac{b}{\lambda(b-c)-b} = \frac{\nu b}{(\mu+\nu)(b-c)-\nu b} = A-1,$$

so geht die obige transcendente Gleichung in folgende algebraische über: $$w^{\mu+\nu} - Aw^{\mu} + A - 1 = 0,$$

die in Verbindung mit
$$t = \nu \lg n\, w$$

die Zeit des Verschwindens von c bestimmt. Es lässt sich zeigen, dass t immer einen reellen positiven Werth hat. Zuerst nämlich ist A immer positiv. Denn wäre es $\gtreqless 0$, so müsste sein Nenner $\gtreqless 0$, folglich

$$c \lesseqgtr \frac{\mu b}{\mu+\nu}, \text{ also } \lesseqgtr \frac{mab(b+c)}{(1+m)a(b+c)+bc}, \text{ d. i.}$$
$$c^2[(1+\mu)a+b] + abc \geqq mab^2$$

sein, was nach der Voraussetzung, dass c unter dem statischen Grenzwerth liegt, nach §. 147. unmöglich ist. Ist nun der Nenner von A stets positiv, so ist auch immer $A > 1$, folglich $A-1$ positiv. Die Gleichung für w hat also zwei Zeichenwechsel, mithin nicht mehr als zwei reelle positive Wurzeln. Von diesen ist die eine unmittelbar gegeben, nämlich $w = 1$. Dividirt man den linken Theil der Gleichung durch $w-1$, so kommt

$$w^{\mu+\nu-1} + w^{\mu+\nu-2} + \ldots + w^{\mu} - (A-1)(w^{\mu-1} + w^{\mu-2} + \ldots + w + 1) = 0.$$

Da nun in dieser Gleichung das letzte Glied $= -(A-1)$, also negativ ist, so muss sie eine positive reelle Wurzel, sie kann aber auch, da sie einen einzigen Zeichenwechsel hat, nicht mehr als eine haben. Diese Wurzel muss aber auch > 1 sein. Denn für $w = 1$ wird der linke Theil der vorstehenden Gleichung $$\nu - \mu(A-1), \text{ d. i. } \frac{-(\mu+\nu)\nu c}{(\mu+\nu)(b-c)-\nu b},$$

also, da, wie gezeigt wurde, der Nenner dieses Ausdrucks immer positiv ist, negativ. Derselbe linke Theil wird aber für

hinlänglich grosse positive Werthe von w, oder, was dasselbe, für die Grenze der Wurzeln positiv. Es muss also zwischen dieser Grenze und 1 eine Wurzel liegen.

Ist nun $w > 1$, so folgt von selbst, dass durch die Gleichung $t = \nu \lg n$ ein positiver Werth von t gegeben ist.

151.

Für die genäherte numerische Auflösung der Gleichung

$$w^{\mu+\nu} - Aw^{\mu} + A - 1 = 0,$$

deren linken Theil wir abgekürzt durch $f(w)$ bezeichnen wollen, sind folgende Bemerkungen von Nutzen.

Da
$$f'(w) = [(\mu + \nu) w^{\nu} - \mu A] w^{\mu-1},$$
so wird für $w = 1$
$$f'(1) = \nu - \mu(A-1), \text{ also } < 0.$$
Da nun auch $f(1) < 0$, so muss von $w = 1$ an der absolute Werth des negativen $f(w)$ Anfangs wachsen. Da aber für die obere Grenze der positiven Wurzeln $f(w) > 0$ ist, so muss dieses Wachsen ein Maximum erreichen. Der Werth von w, der diesem Maximum zugehört, wird bestimmt durch die Gleichung $f'(w) = 0$, aus welcher folgt

$$w = \left(\frac{\mu A}{\mu + \nu}\right)^{\frac{1}{\nu}}.$$

Die gesuchte Wurzel wird also zwischen diesem Werthe und der oberen Grenze der positiven Wurzeln liegen. Sind beide um mehr als eine Decimaleinheit von einander verschieden, so wird man leicht durch Substitution von zwischenliegenden Werthen zwei Grenzen erhalten, die um nicht mehr als eine solche Einheit von einander differiren. Sei nun der kleinere dieser Werthe $= \alpha$, so ergiebt sich, wenn man $w = \alpha + \varepsilon$ setzt, durch Entwickelung von $f(\alpha + \varepsilon)$ mit Vernachlässigung der zweiten und höheren Potenzen

$$f(\alpha + \varepsilon) = \alpha^{\mu+\nu} - A\alpha^{\mu} + A - 1 + [(\mu + \nu)\alpha^{\nu} - \mu A]\alpha^{\mu-1}\varepsilon = 0,$$

woraus
$$\varepsilon = \frac{-f(\alpha)}{(\mu + \nu)\alpha^{\mu+\nu-1} - \mu A\alpha^{\mu-1}},$$

und damit der verbesserte Werth $\alpha + \varepsilon$ folgt. Geht man von der obern Grenze β der gesuchten Wurzel aus, so ist $w = \beta - \varepsilon'$ zu setzen, und ergiebt sich dann

$$\varepsilon' = \frac{f(\beta)}{(\mu + \nu)\beta^{\mu+\nu-1} - \mu A\beta^{\mu-1}}.$$

Nach der Theorie der Gleichungen muss aber die Näherungsrechnung, um sicher zu sein, jederzeit von derjenigen Wurzelgrenze ausgehen, für welche der zweite Differentialquotient des linken Theils der Gleichung mit diesem selbst einerlei Vorzeichen hat. Hier ist nun

$$f''(w) = [(\mu+\nu)(\mu+\nu-1)\,w^{\nu} - \mu(\mu-1)A]\,w^{\mu-2}.$$

Dieser Werth wird aber für

$$w \gtreqless \left(\frac{\mu A}{\mu+\nu}\right)^{\frac{1}{\nu}}, \ldots \gtreqless \mu\nu A\left(\frac{\mu A}{\mu+\nu}\right)^{\frac{\mu-2}{\nu}};$$

ist also immer positiv. Da nun von den beiden Grenzwerthen α, β nur für $\beta\, f(\beta) > 0$, so muss die Rechnung, um sicher zu sein, immer von β ausgehen, und kommt daher nur die Formel für ε' in Anwendung.

152.

Endlich lässt sich auch noch allgemein erweisen, dass die durch die Gleichung $t = \nu \lg n\, w$ bestimmte Zeit des Verschwindens von c aus dem Bewusstsein immer grösser ist als die Zeit $t = \lg n \frac{S_0}{S_0 - c}$, welche c zum Verschwinden brauchen würde, wenn es zugleich mit a und b ungehemmt ins Bewusstsein getreten wäre (vgl. §. 107.).

Aus dem vorigen §. folgt nämlich, dass, wenn w die positive Wurzel der Gleichung $w^{\mu+\nu} - Aw^{\mu} + A - 1 = 0$ bedeutet, welche > 1 ist, sein wird

$$w > \left(\frac{\mu A}{\mu+\nu}\right)^{\frac{1}{\nu}}.$$

Es lässt sich aber leicht zeigen, dass

$$\frac{\mu A}{\mu+\nu} > \frac{S_0}{S_0 - c}.$$

Da nämlich S_0 der Antheil von c an der HS. $b + c$ der drei Vorstellungen a, b, c, so ist

$$S_0 = \frac{mab(b+c)}{ab+ac+bc} = \frac{\mu b}{\nu},$$

folglich

$$\frac{S_0}{S_0 - c} = \frac{1}{1 - \frac{\nu c}{\mu b}}.$$

Nach dem vorigen §. ist aber auch

$$\frac{\mu A}{\mu+\nu} = \frac{1}{1 - \frac{\nu c}{\mu(b-c)}};$$

woraus sofort erhellt, dass $\frac{\mu A}{\mu + \nu} > \frac{S_0}{S_0 - c}$. Hieraus folgt nun weiter

$$w^\nu > \frac{S_0}{S_0 - c}$$

und

$$\nu \lg n\ w > \lg n \frac{S_0}{S_0 - c}.$$

Wenn also die drei Vorstellungen gleichzeitig aus dem Innern der Seele aufsteigen, so hält sich die schwächste neben den beiden stärkeren länger im Bewusstsein, als wenn alle drei Vorstellungen von Aussen her gegeben sind, vorausgesetzt, dass c einen Werth hat, der so klein ist, dass er unter den beiden Fällen zugehörigen statischen Grenzwerthen liegt.

153.

Mit dem Verschwinden von c aus dem Bewusstsein ändert sich für die im Bewusstsein zurückbleibenden a, b das Bewegungsgesetz, indem das in §. 141. für zwei Vorstellungen nachgewiesene, wiewohl, wie sich von selbst versteht, mit andern Constanten wieder eintritt. Es fängt also jetzt ein zweites Bewegungsstadium an.

Seien a_1 und b_1 die Quantitäten von a und b, die gleichzeitig mit dem Verschwinden von c frei geworden sind. Beginne von jetzt an eine neue Zeitbestimmung; nach Ablauf der Zeit t_1 habe sich a_1 um s'_1, b_1 um s''_1 geändert, so dass, je nachdem s'_1 und s''_1 positiv oder negativ, a und b gestiegen oder gesunken sein werden. Da also dann $a_1 + s'_1$ von a, $b_1 + s''_1$ von b im Bewusstsein ist, so wird die HS. $= m(b_1 + s''_1)$ sein, wovon $\frac{mb(b_1 + s''_1)}{a + b}$ auf a, $\frac{ma(b_1 + s''_1)}{a + b}$ auf b kommen muss. Nun sind aber die noch übrigen Hemmungen von a und b bezüglich $a - a_1 - s'_1$ und $b - b_1 - s''_1$; es würden a und b diesen Hemmungen proportional aufstreben, wenn nicht die Antheile an der HS. ein Widerstreben entgegensetzten. Mit Berücksichtigung desselben werden daher die Geschwindigkeiten von a und b folgende sein:

$$\frac{ds'_1}{dt_1} = a - a_1 - s'_1 - \frac{mb(b_1 + s''_1)}{a + b};$$

$$\frac{ds''_1}{dt_1} = b - b_1 - s''_1 - \frac{ma(b_1 + s''_1)}{a + b};$$

oder, wenn wir wieder, wie in §. 140., $1 + \frac{ma}{a+b} = k$ setzen,

$$\frac{ds'_1}{dt_1} = a - a_1 - (k-1)\frac{bb_1}{a} - s'_1 - (k-1)\frac{bs''_1}{a};$$

$$\frac{ds''_1}{dt_1} = b - kb_1 - ks''_1.$$

Diese Formeln unterscheiden sich von denen in §. 140. nur durch die constanten Zusätze zu a und b, $-a_1 - (k-1)\frac{bb_1}{a}$ und $-kb_1$. Auf dieselbe Weise wie jene Formeln integrirt, geben sie nach den gehörigen Reductionen

$$s'_1 = [a - a_1 - \frac{b}{a}(b - b_1)](1 - e^{-t_1}) + \frac{b}{ka}(b - kb_1)(1 - e^{-kt_1});$$

$$s''_1 = (\frac{b - kb_1}{k})(1 - e^{-kt_1}).$$

Aus diesen Formeln folgen die Geschwindigkeiten als Functionen der Zeit, nämlich

$$\frac{ds'_1}{dt_1} = [a - a_1 - \frac{b}{a}(b - b_1) + \frac{b}{a}(b - kb_1)e^{-(k-1)t_1}]e^{-t_1};$$

$$\frac{ds''_1}{dt_1} = (b - kb_1)e^{-kt_1}.$$

Für $t_1 = 0$ wird

$$\frac{ds'_1}{dt_1} = a - a_1 - (k-1)\frac{bb_1}{a}; \quad \frac{ds''_1}{dt_1} = b - kb_1;$$

Werthe, die im Allgemeinen sowohl positiv als negativ sein können. Es hängt also von der Grösse von a, b und m ab, ob a und b, nachdem c verschwunden, steigen oder sinken. Die Grenzen, die sie mit $t = \infty$ erreichen, sind

$$a - a_1 - (\frac{k-1}{k})\frac{b^2}{a} = a - a_1 - \frac{mbb}{(1+m)a+b}, \text{ für } a;$$

$$\frac{b}{k} - b_1 = b - b_1 - \frac{mab}{(1+m)a+b}, \text{ für } b.$$

Da nun aber im ersten Stadium der Bewegung sich schon a_1, b_1 erhoben haben, so sind die Höhen, auf welchen sich a und b im Gleichgewicht neben einander behaupten, bezüglich

$$a - \frac{mbb}{(1+m)a+b} \text{ und } b - \frac{mab}{(1+m)a+b},$$

d. i. (§. 141.) a' und b'. Wenn also von drei gleich entgegengesetzten frei aufsteigenden Vorstellungen a, b, c die schwächste kleiner ist als der durch die beiden andern bestimmte statische Grenzwerth der zweiten

Art, so bleibt im Gleichgewicht von den beiden stärkeren genau so viel im Bewusstsein, als bleiben würde, wenn c nicht vorhanden wäre. Für sinkende Vorstellungen haben wir in §. 61. einen analogen, doch etwas beschränkteren Satz gefunden.

154.

Hierbei entsteht die Frage, ob diese Werthe a', b' grösser sind als diejenigen Reste, welche von a und b bleiben würden, wenn diese Vorstellungen, und mit ihnen c, gleichzeitig von Aussen her ins Bewusstsein getreten wären. Nach §. 61. sind diese Reste

$$a - \frac{b\,[mb-(1-m)c]}{a+b} \text{ für } a,$$

$$b - \frac{a\,[mb-(1-m)c]}{a+b} \text{ für } b.$$

Es kommt also darauf an, ob

$$\frac{mb}{(1+m)a+b} < \frac{mb-(1-m)c}{a+b} \text{ ist;}$$

eine Frage, die sich darauf reducirt, ob

$$(1-m)c < \frac{m^2ab}{(1+m)a+b}.$$

Nun ist aber (§. 147.) im vorliegenden Falle

$$c < b\sqrt{\frac{ma}{(1+m)a+b}}.$$

Daher findet vorstehende Bedingung statt, wenn

$$1-m < m\sqrt{\frac{ma}{(1+m)a+b}},$$

d. i. wenn

$$m > \frac{\sqrt{4(a^2-b^2)+(a+2b)^2}-(a+2b)}{2(a-b)}.$$

Da der Werth dieses Ausdrucks allgemein < 1 ist, so kann m immer grösser als derselbe sein. Die Vorstellungen a, b werden also, nachdem sie, mit c zugleich frei aufsteigend, dieses aus dem Bewusstsein verdrängt haben, nur dann sich auf einer grösseren Höhe im Bewusstsein halten als die ist, welche sie einnehmen würden, wenn sie mit c zugleich aus dem ungehemmten Zustand ins Gleichgewicht übergegangen wären und c zuvor aus dem Bewusstsein verdrängt hätten, wenn sie zu einander in einem hinlänglich grossen Gegensatz m stehen. Hierdurch erhält der in §. 141. für zwei Vor-

stellungen gefundene Satz im vorliegenden Falle eine Beschränkung; doch zeigen sich auch hier die Vorstellungen immer noch gerade da beim Aufsteigen verträglicher als beim Sinken; wo es am wenigsten zu erwarten wäre, nämlich bei starkem Gegensatz.

155.

Was endlich noch die specielle Beschaffenheit der Bewegungen von a und b in dem zweiten Stadium betrifft, so zeigt der Werth des Differentialquotienten $\frac{ds''_1}{dt_1} = (b - kb_1)e^{-kt_1}$ in §. 153., dass, je nachdem $b - kb_1 \gtrless 0$, b fortwährend $\begin{Bmatrix}\text{steigt}\\\text{sinkt}\end{Bmatrix}$. Dagegen kann $\frac{ds'_1}{dt_1}$ zwischen $t_1 = 0$ und $t_1 = \infty$ Null werden und daher sein Zeichen wechseln. In der That giebt $\frac{ds'_1}{dt_1} = 0$

$$t_1 = \frac{1}{k-1} \lg n \frac{b - kb_1}{b - b_1 - \frac{a}{b}(a - a_1)}.$$

Dieser Werth hat jedoch nur dann eine gültige Bedeutung, wenn die Grösse, von der der Logarithmus zu nehmen ist, positiv und > 1. Für solche Werthe hat dann s'_1 ein positives oder negatives Maximum.

Alsdann aber hat die Bewegungscurve von a auch einen Wendepunkt, der aus der Gleichung $\frac{d^2 s_1}{dt_1^{\,2}} = 0$ gefunden wird und auf die Zeit

$$t_1 = \frac{1}{k-1} \lg n \frac{k(b - kb_1)}{b - b_1 - \frac{a}{b}(a - a_1)},$$

also auf eine um die Grösse $\frac{1}{k-1} \lg n\, k$ spätere Zeit als die des Maximums fällt.

156.

Es folgen zur Beleuchtung der vorstehenden allgemeinen Rechnungen einige Beispiele.

1. Sei $a = 10$, $b = 10$, $c = 4$, $m = 1$. Nach der ersten Tabelle in §. 149. ist der statische Grenzwerth $= 4{,}34$; c liegt also unter ihm. Bevor es aber aus dem Bewusstsein verschwindet, erreicht es ein Maximum seiner Erhebung, welches, da hier $\lambda = \frac{16}{9}$, nach §. 144. auf die Zeit

$$t = \frac{9}{7} \lg n \frac{5}{3} = 0{,}657 \text{ fällt, wo } s''' = 0{,}986.$$

Gleichzeitig ist $s' = s'' = 4{,}442$; um so viel haben sich also dann a und b erhoben. Der Wendepunkt der Curve, die c beschreibt, fällt auf

$$t = 0{,}657 + \frac{9}{7} \lg n \frac{16}{9} = 1{,}397; \text{ wo } s''' = 0{,}640.$$

Gleichzeitig ist $s' = s'' = 6{,}578$. Zur Bestimmung der Zeit des Verschwindens von c ist in den Formeln des §. 150.... $\mu = 7$, $\nu = 9$, daher $A = 16$ zu setzen. Dies giebt die beiden Gleichungen

$$f(w) = w^{16} - 16w^7 + 15 = 0;$$
$$\text{und } t = 9 \lg n\, w.$$

Was die erste betrifft, so hat man nach §. 151. ihre Wurzel über dem Werth von $\sqrt[9]{7} = 1{,}24$ zu suchen. In der That findet sich

$$f(1{,}34) = -1{,}06; \quad f(1{,}35) = 5{,}96.$$

Setzt man zur schärferen Bestimmung der Wurzel $w = 1{,}35 - \varepsilon'$, so findet sich

$$\varepsilon' = \frac{5{,}96}{16[(1{,}35)^{15} - 7(1{,}35)^6]} = 0{,}0078,$$

also $w = 1{,}3422$, folglich $t = 2{,}647$. Die Substitution dieses Werthes in den Formeln a. E. des §. 143. giebt dann

$$s' = s'' = a_1 = b_1 = 7{,}804.$$

Jetzt beginnt das zweite Stadium der Bewegung. Nach §. 153. ist, da jetzt $k = \frac{3}{2}$, für den Anfang desselben

$$\frac{ds'_1}{dt_1} = \frac{ds''_1}{dt_1} = -1{,}706;$$

a und b sinken also, nämlich vermöge des a. E. desselben §'s gefundenen Satzes, nach den in §. 141. bestimmten Grenzen

$$a' = b' = 6{,}667,$$

und zwar sinken beide ununterbrochen, da die in §. 155. bestimmte Zeit des Maximums von a, wegen $a = b$ und $a_1 = b_1$, keinen reellen und endlichen positiven Werth hat.

Wären dieselben Vorstellungen von Aussen her ins Bewusstsein getreten, so würde nach der Formel für t in §. 107., in der $S_0 = \frac{70}{9}$ zu setzen ist, c in der Zeit $t = \lg n \frac{35}{17} = 0{,}722$, also in $3\frac{2}{3}$ Mal so kurzer Zeit als bei dem freien Aufsteigen

verschwinden. Aus §. 104. (3) folgt dann weiter, indem $S_0 = \frac{28}{9}$ zu setzen ist, für die gleichzeitige Hemmung von a sowohl als $b \ldots \sigma = \frac{28}{9}(1 - e^{-0,722}) = 1,600$. Folglich sind dann die Reste beider Vorstellungen 8,400. Sie sinken dann weiter bis auf diejenigen Reste, welche sie im Gleichgewicht auch haben würden, wenn c nicht vorhanden wäre, nämlich bis auf 5,000. Es bleibt also von ihnen nur $\frac{1}{4}$ von dem Quantum, das sie beim Aufsteigen dauernd behaupten, im Bewusstsein.

2. Sei $a = 15$, $b = 10$, $c = 4$, $m = 1$, so ist der statische Grenzwerth $= 4,53$; es liegt also c noch tiefer als im vorigen Beispiel unter ihm. Da hier $\lambda = \frac{46}{25}$, so fällt das Maximum von c auf

$$t = 0,608, \text{ wozu } s''' = 0,928$$

als grösster Werth der Erhebung von c gehört. Gleichzeitig ist für a und b $\quad s' = 6,593, \quad s'' = 4,202.$

Wir übergehen den weniger wichtigen Wendepunkt. Die Zeit des Verschwindens von c wird bestimmt durch die Gleichungen

$$f(w) = w^{46} - \frac{138}{13} w^{21} + \frac{125}{13} = 0,$$

$$t = 25 \text{ lgn } w.$$

Die Wurzel der ersteren muss grösser sein als $\left(\frac{21.138}{13.46}\right)^{\frac{1}{25}} = 1,065$. In der That findet sich

$$f(1,09) = -2,556; \quad f(1,10) = +1,238.$$

Setzt man nun $w = 1,10 - \varepsilon'$, so erhält man $\varepsilon' = 0,0007$; also $\quad w = 1,0993$; woraus $t = 2,365$ folgt.

Für diesen Zeitpunkt ist

$$s' = a_1 = 12,619; \quad s'' = b_1 = 7,604.$$

Es hat also, ohnerachtet hier a um die Hälfte stärker ist als im ersten Beispiel, doch beim Verschwinden von c aus dem Bewusstsein b sich fast eben so hoch gehoben wie dort. Die Zeit des Verweilens von c im Bewusstsein aber ist jetzt kürzer.

Für den Anfang des zweiten Stadiums der Bewegung ist

$$\frac{ds'_1}{dt_1} = -0,661; \quad \frac{ds''_1}{dt_1} = -2,166;$$

a und b sinken also. Die Grenzen, für welche sie ins Gleichgewicht kommen, sind

$$a' = 12,5; \quad b' = 6,25.$$

Es beharrt also b auf einer nur wenig niedrigern Höhe als im vorigen Beispiel. Was aber a betrifft, so sinkt es zuerst unter seine statische Linie und steigt dann wieder zu ihr auf. Es hat nämlich nach §. 155. ein Maximum seines Sinkens

$$\text{für } t_1 = 1{,}019, \text{ wo } s'_1 = -0{,}212;$$

so dass es hier von 12,619 auf 12,407 gesunken ist und von da an steigt, bis es mit $t_1 = \infty$ die Höhe 12,5 vollständig erreicht.

Wären dieselben Vorstellungen von Aussen her ins Bewusstsein getreten, so würde c schon in der Zeit

$$t = \lg n \frac{21}{11} = 0{,}647,$$

also in fast $3\frac{2}{3}$ Mal so kurzer Zeit verschwunden sein. In diesem Augenblicke würde sein

$$\text{Rest von } a = 13{,}933; \quad \text{Rest von } b = 8{,}400;$$

beide grösser als im ersten Falle. Aber im Gleichgewicht bleiben von ihnen nur die Reste 11 und 4 übrig, also bedeutend kleinere, als wenn die Vorstellungen von Innen kommen.

3. Sei $a = 15$, $b = 10$, $c = 2$, $m = 1$, so ist $\lambda = \frac{19}{10}$. Hieraus folgt für die Zeit des Maximums der Erhebung von c

$$t = \frac{10}{9} \lg n \frac{5}{4} = 0{,}248, \text{ wo } s''' = 0{,}221.$$

Gleichzeitig ist für a und b

$$s' = 3{,}265; \quad s'' = 2{,}152.$$

Die Zeit des Verschwindens von c bestimmen die Gleichungen

$$f(w) = w^{19} - \frac{38}{13} w^9 + \frac{25}{13} = 0;$$

$$t = 10 \lg n\, w.$$

Die positive Wurzel der erstern muss $> \left(\frac{9 \cdot 38}{19 \cdot 13}\right)^{\frac{1}{10}} = 1{,}033$ sein. In der That findet sich

$$f(1{,}05) = -0{,}085; \quad f(1{,}06) = +0{,}010.$$

Setzt man $w = 1{,}06 - \varepsilon'$; so ergiebt sich $\varepsilon' = 0{,}0008$, daher

$$w = 1{,}0592; \quad \text{folglich } t = 0{,}575.$$

Für diesen Zeitpunkt ist

$$s' = a_1 = 6{,}427; \quad s'' = b_1 = 4{,}188.$$

Für den Anfang des zweiten Stadiums, innerhalb dessen $k = \frac{8}{5}$, ist

$$\frac{ds'_1}{dt_1} = 6{,}898; \quad \frac{ds''_1}{dt_1} = 3{,}299.$$

Es steigt also jetzt sowohl a als b und zwar ununterbrochen. Im Gleichgewicht ist wieder, wie zuvor, $a' = 12{,}5$; $b = 6{,}25$.

Wären dieselben Vorstellungen von Aussen her ins Bewusstsein getreten, so würde c in der Zeit

$$t = \lg n \frac{9}{7} = 0{,}251,$$

also in weniger als der halben Zeit verschwunden sein. Die gleichzeitigen Reste von a und b wären 14,733 und 9,600; alles Uebrige wie zuvor.

4. Sei endlich $a = 15$, $b = 10$, $c = 2$, wie zuvor, aber $m = \frac{1}{3}$; so ist $\lambda = \frac{13}{10}$; daher die Zeit des Maximums von c

$$t = \frac{10}{3} \lg n \frac{5}{4} = 0{,}744; \text{ wo } s''' = 0{,}569.$$

Gleichzeitig ist $s' = 7{,}811$, $s'' = 5{,}151$.

Die Zeit des Verschwindens von c bestimmen die Gleichungen

$$f(w) = w^{13} - 26\, w^3 + 25 = 0,$$
$$t = 10 \lg n\, w.$$

Die positive Wurzel der erstern muss $> \left(\frac{3 \cdot 26}{13}\right)^{\frac{1}{10}} = 6^{\frac{1}{10}} = 1{,}196$ sein. Es findet sich in der That

$$f(1{,}30) = -1{,}835; \quad f(1{,}31) = +0{,}010.$$

Setzt man daher $w = 1{,}31 - \varepsilon'$, so erhält man $\varepsilon' = 0{,}00005$, folglich $w = 1{,}30995$; $t = 2{,}700$.

Es hält sich also c $4\frac{7}{10}$ Mal so lange als im vorigen Beispiel im Bewusstsein. Für diesen Zeitpunkt ist

$$s' = a_1 = 13{,}743; \quad s'' = b_1 = 8{,}955;$$

a und b haben sich also hier weit höher erhalten als im vorigen Beispiel.

Für den Anfang des zweiten Stadiums, innerhalb dessen $k = \frac{6}{5}$, ist

$$\frac{ds'_1}{dt_1} = 0{,}063; \quad \frac{ds''_1}{dt_1} = -0{,}746.$$

Es sinkt also a und steigt b; beides geschieht ohne weitere Unterbrechung. Von b versteht sich dies von selbst. Was aber a betrifft, so ist in der Formel für t in §. 155. $b - kb_1 = -0{,}746$; $b - b_1 - \frac{a}{b}(a - a_1) = -0{,}845$, also der Quotient aus dem letztern Werth in den erstern zwar positiv, aber ein echter Bruch, daher sein Logarithmus negativ. Für das Gleichgewicht endlich ist $a' = 13{,}889$; $b' = 8{,}333$; bedeutend grösser als für $m = 1$.

Wären die Vorstellungen von Aussen her ins Bewusstsein getreten, so würde c in der Zeit

$$t = \lg n\, 3 = 1{,}099,$$

also fast in dem $2\frac{1}{2}$ten Theile der im Vorstehenden bestimmten Zeit, verschwunden sein. Die gleichzeitigen Reste wären

für a, 14,733; für b, 9,600.

Im Gleichgewicht würden sie sein

14,200 und 8,800.

Sie sind also hier etwas grösser als die Reste, die beim freien Aufsteigen im Bewusstsein bleiben, und es tritt also der in §. 154. vorhergesehene Fall ein. Die dort gefundene Grenze,

$$\frac{\sqrt{4(a^2-b^2)+(a+2b)^2}-(a+2b)}{2(a-b)},$$

über welcher m liegen muss, wenn die beim Aufsteigen übrig bleibenden Reste grösser sein sollen als die, welche beim Sinken zurückbleiben, hat hier nämlich den Werth 0,653; sie ist also $> m = \frac{1}{3}$.

157.

Das in §. 143 ff. gezeigte Verfahren zur Auffindung der Gesetze des freien Steigens von drei gleich entgegengesetzten Vorstellungen lässt sich, unter der Voraussetzung gleichen Gegensatzes, ohne Schwierigkeit auf jede beliebige Anzahl ausdehnen. Es ergeben sich dabei Ausdrücke von der nämlichen Form, nur sind die Constanten zusammengesetzter. Wir begnügen uns, dies an einem specielleren, theilweise schon von Herbart* behandelten Falle nachzuweisen.

Seien ausser der stärksten Vorstellung $= a$ eine Anzahl μ schwächere unter sich gleiche von der Intensität $= b$, und eine Anzahl ν noch schwächere ebenfalls unter sich gleiche von der Intensität $= c$ gegeben. Der Gegensatz aller dieser $\mu + \nu + 1$ Vorstellungen sei gleich und wie bisher $= m$.

Sei nun nach Verlauf der Zeit t von a gestiegen s', von jedem b aber s'', und s''' von jedem c; so wird sich dann eine HS. gebildet haben, die $= m\,(\mu s'' + \nu s''')$ ist und von der

* Psychologische Untersuchungen. Heft II. S. 79 ff.

$$\frac{mbc(\mu s'' + \nu s''')}{bc + \mu ac + \nu ab} \text{ auf } a,$$
$$\frac{mac(\mu s'' + \nu s''')}{bc + \mu ac + \nu ab} \text{ auf jedes } b,$$
$$\frac{mab(\mu s'' + \nu s''')}{bc + \mu ac + \nu ab} \text{ auf jedes } c \text{ kommt.}$$

Hiernach wird nun

$$\frac{ds'}{dt} = a - s' - \frac{mbc(\mu s'' + \nu s''')}{bc + \mu ac + \nu ab};$$
$$\frac{ds''}{dt} = b - s'' - \frac{mac(\mu s'' + \nu s''')}{bc + \mu ac + \nu ab};$$
$$\frac{ds'''}{dt} = c - s''' - \frac{mab(\mu s'' + \nu s''')}{bc + \mu ac + \nu ab}.$$

Multiplicirt man die zweite dieser Gleichungen mit μ, die dritte mit ν und addirt beide Producte, so ergiebt sich, wenn zur Abkürzung

$$1 + \frac{ma(\mu c + \nu b)}{bc + \mu ac + \nu ab} = \lambda_1$$

gesetzt wird,

$$\frac{d(\mu s'' + \nu s''')}{dt} = \mu b + \nu c - \lambda_1(\mu s'' + \nu s''').$$

Die Integration dieser Formel giebt, da für $t = 0$ auch $s'' = s''' = 0$,

$$-\lambda_1 t = \lg n \frac{\mu b + \nu c - \lambda_1(\mu s'' + \nu s''')}{\mu b + \nu c};$$

daher

$$\mu s'' + \nu s''' = \left(\frac{\mu b + \nu c}{\lambda_1}\right)(1 - e^{-\lambda_1 t}).$$

Führen wir diesen Ausdruck in dem für $\frac{ds'}{dt}$ ein und setzen abkürzend $\frac{bc}{bc + \mu ac + \nu ab} = q_1$, so erhalten wir die Differentialgleichung

$$ds' + s'dt = \left[a - mq_1\left(\frac{\mu b + \nu c}{\lambda_1}\right)\right](1 - e^{-\lambda_1 t});$$

von der das Integral, da für $t' = 0$ auch $s' = 0$,

$$s' = \left[a - mq_1\left(\frac{\mu b + \nu c}{\lambda_1}\right)\right](1 - e^{-t}) - \frac{mq_1(\mu b + \nu c)}{\lambda_1(\lambda_1 - 1)}(e^{-\lambda_1 t} - e^{-t}).$$

Es ist aber

$$\frac{mq_1(\mu b + \nu c)}{\lambda_1(\lambda_1 - 1)} = \frac{bc}{\lambda_1 a}\left(\frac{\mu b + \nu c}{\mu c + \nu b}\right);$$
$$\frac{mq_1(\mu b + \nu c)}{\lambda_1} = \frac{bc}{a}\left(\frac{\mu b + \nu c}{\mu c + \nu b}\right) - \frac{bc}{\lambda_1 a}\left(\frac{\mu b + \nu c}{\mu c + \nu b}\right).$$

Setzen wir daher, abermals abkürzend, $\frac{\mu b + \nu c}{\mu c + \nu b} = f$, so ergiebt sich

$$s' = \left(a - \frac{bcf}{a}\right)(1 - e^{-t}) + \frac{bcf}{\lambda_1 a}(1 - e^{-\lambda_1 t});$$

und auf ähnliche Weise

$$s'' = (b - cf)(1 - e^{-t}) + \frac{cf}{\lambda_1}(1 - e^{-\lambda_1 t});$$

$$s''' = (c - bf)(1 - e^{-t}) + \frac{bf}{\lambda_1}(1 - e^{-\lambda_1 t}).$$

Hieraus folgt unmittelbar durch Differentiation

$$\frac{ds'}{dt} = \left(a - \frac{bcf}{a}\right)e^{-t} + \frac{bcf}{a}e^{-\lambda_1 t};$$

$$\frac{ds''}{dt} = (b - cf)\ e^{-t} + \frac{cf}{\lambda_1}e^{-\lambda_1 t};$$

$$\frac{ds'''}{dt} = (c - bf)\ e^{-t} + \frac{bf}{\lambda_1}e^{-\lambda_1 t}.$$

Diese sechs Formeln gehen sogleich, wie es sein muss, in die entsprechenden in §. 143. a. E. und 144. z. A. über, wenn $\mu = \nu = 1$ und daher $f = 1$, $\lambda_1 = \lambda$ wird. Ist allein $f = 1$, d. i. entweder $b = c$, so dass alle Vorstellungen ausser a gleiche Intensität haben, oder $\mu = \nu$, so dass die b und c in gleicher Anzahl gegeben sind, so unterscheiden sich vorstehende Formeln von den früheren nur dadurch, dass in den letzteren λ_1 an die Stelle von λ tritt.

Bei solcher Aehnlichkeit dieser Formeln mit den früheren lässt sich schon im Allgemeinen genugsam übersehen, dass die Bewegungen der Vorstellungen bei der jetzigen Voraussetzung ganz analog denen für drei Vorstellungen sein werden, und dass die ν schwächsten Vorstellungen c durch a und die μ stärkeren b ganz aus dem Bewusstsein verdrängt werden können, wenn sie gegen diese schwach genug sind. Die speciellere Bestimmung der statischen Grenzwerthe mag hier übergangen werden.

158.

Suchen wir jetzt die Gesetze des freien Aufsteigens von drei Vorstellungen a, b, c, unter denen nach dem frühern Schema a und b im Grade m, b und c im Grade n, c und a im Grade p entgegengesetzt sind.*

* Auch diese Aufgabe löst Herbart im zweiten, 1840 erschienenen Hefte seiner psychologischen Untersuchungen, S. 87. Es mag jedoch dem Verfasser verstattet sein zu bemerken, dass er durch dieselbe Behandlungsweise unabhängig von Herbart schon 1839 in dem Programm: *Quaestion. mathem. psychol. spec.* V. *p.* 14 zu der Auflösung gelangt war.

Habe nach der Zeit t sich s' von a, s'' von b, s''' von c erhoben, so ist die HS. entweder $= ms'' + ps'''$, oder $= ms' + ns'''$, oder $= ps' + ns''$. Jeder dieser drei Fälle muss besonders betrachtet werden. Doch wird sich zeigen, dass die für den einen gültige Auflösung leicht auf den andern übertragen werden kann. Seien die Bruchtheile, nach welchen die HS. sich auf a, b, c vertheilt, q', q'', q''', also

$$q' = \frac{(m+p)\,bc}{(n+p)\,ab + (m+n)\,ac + (m+p)\,bc};$$

$$q'' = \left(\frac{m+n}{m+p}\right)\frac{a}{b}q'; \quad q''' = \left(\frac{n+p}{m+p}\right)\frac{a}{c}q';$$

so ergiebt sich, wenn die HS. $= ms'' + ps'''$, am Ende der Zeit t

$$\frac{ds'}{dt} = a - s' - q'(ms'' + ps''');$$

$$\frac{ds''}{dt} = b - s'' - q''(ms'' + ps''');$$

$$\frac{ds'''}{dt} = c - s''' - q'''(ms'' + ps''').$$

Ist die HS. $= ms' + ns'''$ oder $= ps' + ns''$, so treten diese Ausdrücke in den vorstehenden Formeln an die Stelle von $ms'' + ps'''$, das Uebrige bleibt unverändert. Von diesen Formeln enthält die erste alle drei Veränderliche s', s'', s''', die zweite und dritte nur zwei derselben. Für die HS $= ms' + ns'''$ wird aber offenbar nur die zweite Formel, und für die HS. $= ps' + ns''$ nur die dritte alle drei Veränderliche, jede der übrigen aber deren immer nur zwei enthalten. Hieraus ersieht man, dass, wenn für eine dieser HSS. die Integrale gefunden sind, sie durch blosse Vertauschung der Buchstaben für die beiden andern sich ergeben werden. Jene Integrale erhält man aber auf folgendem Wege.

159.

Sei $1 + mq'' = B$, $pq'' = B_1$, $mq''' = C$, $1 + pq''' = C_1$, so geben die beiden obigen Ausdrücke für $\frac{ds''}{dt}$, $\frac{ds'''}{dt}$ folgende Gleichungen

$$ds'' = (b - Bs'' - B_1 s''')\,dt;$$

$$ds''' = (c - Cs'' - C_1 s''')\,dt.$$

Multiplicirt man nun die zweite von diesen Gleichungen mit einem unbestimmten, nur von den Constanten beider Gleichun-

gen abhängig zu denkenden Coëfficienten $\mathfrak{J}$ und addirt das Product zu der ersten Gleichung, so erhält man

$$ds'' + \mathfrak{J} ds''' = [b + c\mathfrak{J} - (B + C\mathfrak{J}) s'' - (B_1 + C_1 \mathfrak{J}) s'''] \, dt.$$

Sei nun

$$s'' + \mathfrak{J} s''' = u, \text{ woraus } ds'' + \mathfrak{J} ds''' = du \text{ folgt,}$$

so wird

$$du = \{ b + c\mathfrak{J} - (B + C\mathfrak{J}) u + [C\mathfrak{J}^2 + (B - C_1)\mathfrak{J} - B_1] s''' \} \, dt.$$

Setzt man nun $C\mathfrak{J}^2 + (B - C_1)\mathfrak{J} - B_1 = 0$,
so ergeben sich hieraus zwei Werthe von $\mathfrak{J}$, nämlich, wenn statt der eingeführten Abkürzungen wieder die ursprüngliche Bedeutung hergestellt wird,

$$\mathfrak{J}_1 = \frac{p}{m} \text{ und } \mathfrak{J}_2 = -\frac{q''}{q'''}.$$

Die Gleichung für du zieht sich aber jetzt zusammen in

$$du = \{ b + c\mathfrak{J} - (B + C\mathfrak{J}) u \} \, dt,$$

woraus durch Integration erhalten wird

$$\text{Const} - (B + C\mathfrak{J}) t = \lg n \{ b + c\mathfrak{J} - (B + C\mathfrak{J}) u \}.$$

Da aber für $t = 0$ sowohl $s'' = 0$ als $s''' = 0$, also auch $u = 0$, so folgt

$$(B + C\mathfrak{J}) t = \lg n \left(\frac{b + c\mathfrak{J}}{b + c\mathfrak{J} - (B + C\mathfrak{J}) u} \right);$$

woraus

$$u = \frac{b + c\mathfrak{J}}{B + C\mathfrak{J}} \left(1 - e^{-(B + C\mathfrak{J}) t} \right).$$

Setzt man nun für u seinen Werth $s'' + \mathfrak{J} ds'''$, für $\mathfrak{J}$ successiv die Werthe von $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$, und stellt die ursprüngliche Bedeutung von B, C wieder her, so erhält man folgende zwei Gleichungen:

$$s'' + \frac{p}{m} s''' = \frac{mb + pc}{m(1 + mq'' + pq''')} \left(1 - e^{-(1 + mq'' + pq''') t} \right);$$

$$s'' - \frac{q''}{q'''} s''' = \frac{q'''b - q''c}{q'''} \left(1 - e^{-t} \right).$$

Aus ihnen ergiebt sich endlich, wenn man

$$1 + mq'' + pq''' = \lambda_2$$

setzt,

$$\left. \begin{aligned} s'' &= \left[b - \frac{q''(mb + pc)}{\lambda_2 - 1} \right] (1 - e^{-t}) + \frac{q''(mb + pc)}{\lambda_2(\lambda_2 - 1)} (1 - e^{-\lambda_2 t}); \\ s''' &= \left[c - \frac{q'''(mb + pc)}{\lambda_2 - 1} \right] (1 - e^{-t}) + \frac{q'''(mb + pc)}{\lambda_2(\lambda_2 - 1)} (1 - e^{-\lambda_2 t}); \end{aligned} \right\} (1)$$

wobei zu bemerken, dass hier $mb + pc$ die HS. ist, die den Vorstellungen, wenn sie von Aussen her ins Bewusstsein getreten wären, zukäme. Substituirt man diese Ausdrücke in der Gleichung für $\frac{ds}{dt}$ im vorigen §., so kommt

$$ds' + s'dt = [a - \frac{q'(mb+pc)}{\lambda_2}(1 - e^{-\lambda_2 t})]\,dt,$$

woraus zunächst folgt

$$s' = [a - \frac{q'(mb+pc)}{\lambda_2}](1 - e^{-t}) - \frac{q'(mb+pc)}{\lambda_2(\lambda_2 - 1)}(e^{-\lambda_2 t} - e^{-t}).$$

Nun ist aber

$$\frac{mb+pc}{\lambda_2} = \frac{mb+pc}{\lambda_2 - 1} - \frac{(mb+pc)}{\lambda_2(\lambda_2 - 1)};$$

daher

$$s' = [a - \frac{q'(mb+pc)}{\lambda_2 - 1}](1 - e^{-t}) + \frac{q'(mb+pc)}{\lambda_2(\lambda_2 - 1)}(1 - e^{-\lambda_2 t}); \qquad (2)$$

so dass also s' durch eine ganz ähnliche Formel wie zuvor s'' und s''' bestimmt ist. Die drei Formeln a. E. des §. 143. sind in den vorstehenden als specielle Fälle enthalten. Setzt man nämlich $m = n = p$, wo dann $\lambda_2 = \lambda$ wird, so ergeben sich aus (1) und (2) die Formeln

$$s' = (a - \frac{bc}{a})(1 - e^{-t}) + \frac{bc}{\lambda a}(1 - e^{-\lambda t});$$

$$s'' = (b - \frac{ca}{a})(1 - e^{-t}) + \frac{ca}{\lambda a}(1 - e^{-\lambda t});$$

$$s''' = (c - \frac{ab}{a})(1 - e^{-t}) + \frac{ab}{\lambda a}(1 - e^{-\lambda t});$$

welche mit denen a. E. des §. 143. identisch sind, nur dass hier alle drei Formeln in derselben Gestalt erscheinen.

160.

Dass nun (1) und (2) auch die Integrale der Differentialgleichungen geben, die man aus denen im vorigen §. erhält, wenn die HS. $= ms' + ns'''$ oder $= ps' + ns''$ ist, lässt sich leicht zeigen.

Im ersten Falle sind die Differentialgleichungen

$$\frac{ds'}{dt} = a - s' - q'(ms' + ns''');$$

$$\frac{ds''}{dt} = b - s'' - q''(ms' + ns''');$$

$$\frac{ds'''}{dt} = c - s''' - q'''(ms' + ns''').$$

Diese aber ergeben sich auch aus denen in §. 158., wenn man nämlich die Grössen $a,\ s',\ q',\ p$
der Reihe nach mit $b,\ s'',\ q'',\ n,$
und umgekehrt diese mit jenen vertauscht, indess $c,\ s''',\ q''',\ m,$

t unverändert bleiben. Für die HS. $= ps' + ns''$ werden die Differentialgleichungen

$$\frac{ds'}{dt} = a - s' - q'(ps' + ns'');$$
$$\frac{ds''}{dt} = b - s'' - q''(ps' + ns'');$$
$$\frac{ds'''}{dt} = c - s''' - q'''(ps' + ns'').$$

Diese ergeben sich aber auch aus denen in §. 158., wenn man die Grössen a, s', q', m der Reihe nach mit c, s''', q''', n, und umgekehrt diese mit jenen vertauscht, indess b, s'', q'', p und t unverändert bleiben.

Offenbar geben nun die nämlichen Vertauschungen aus den Formeln (1) und (2) die Integrale der durch diese Vertauschung erhaltenen Differentialgleichungen.

161.

Aus §. 159. (1) und (2) folgt unmittelbar

$$\frac{ds'}{dt} = [a - \frac{q'(mb+pc)}{\lambda_2 - 1}]e^{-t} + \frac{q'(mb+pc)}{\lambda_2 - 1}e^{-\lambda_2 t};$$
$$\frac{ds''}{dt} = [b - \frac{q''(mb+pc)}{\lambda_2 - 1}]e^{-t} + \frac{q''(mb+pc)}{\lambda_2 - 1}e^{-\lambda_2 t};$$
$$\frac{ds'''}{dt} = [c - \frac{q'''(mb+pc)}{\lambda_2 - 1}]e^{-t} + \frac{q'''(mb+pc)}{\lambda_2 - 1}e^{-\lambda_2 t}.$$

Für $t = 0$ reduciren sich diese Ausdrücke bezüglich auf a, b, c; für $t = \infty$ werden sie Null. Zwischen diesen Grenzen kann aber noch ausserdem jeder derselben Null werden, was dann ein Maximum der Erhebung der zugehörigen Vorstellung anzeigt. Es ist nämlich

$$\frac{ds'}{dt} = 0, \text{ wenn } t = \frac{1}{\lambda_2 - 1} \lg n \frac{q'(mb+pc)}{m(q'b - q''a) + p(q'c - q'''a)};$$
$$\frac{ds''}{dt} = 0, \text{ wenn } t = \frac{1}{\lambda_2 - 1} \lg n \frac{q''(mb+pc)}{p(q''c - q'''b)};$$
$$\frac{ds'''}{dt} = 0, \text{ wenn } t = \frac{1}{\lambda_2 - 1} \lg n \frac{q'''(mb+pc)}{m(q'''b - q''c)}.$$

Diese Werthe von t sind reell und endlich, wenn die Nenner der Ausdrücke unter dem Logarithmenzeichen positiv und kleiner als die zugehörigen Zähler sind. Dieses letztere findet, wie sich leicht ergiebt, unter allen Umständen statt, so dass

also negative Werthe von t nicht vorkommen können. Die Erfüllung der ersten Bedingung hängt dagegen von den Werthen der gegebenen Grössen ab.

Untersuchen wir zuerst die dritte Formel, so findet sich, dass c ein reelles Maximum hat, wenn

$$q'''b > q''c, \text{ d. i. } c < b\sqrt{\frac{n+p}{m+n}}, \text{ oder } b > c\sqrt{\frac{m+n}{n+p}};$$

was immer möglich ist, wenn $p \geqq m$, aber auch wenn $p < m$, noch möglich sein kann, sofern b im Verhältniss zu c nur gross genug ist. Ebenso hat nach der zweiten Formel b ein reelles Maximum, wenn

$$q''c > q'''b, \text{ d. i. } b < c\sqrt{\frac{m+n}{n+p}}, \text{ oder } c > b\sqrt{\frac{n+p}{m+n}};$$

was, da $b > c$, nur möglich ist, wenn $m > p$, für $m \leqq p$ aber schlechthin unmöglich.

Hieraus erhellt, dass immer nur eine von den beiden Vorstellungen b, c ein Maximum haben kann.

Was endlich a betrifft, so hat es ein Maximum, wenn

$$mq'b + pq'c > (mq'' + pq''')a,$$

d. i. wenn

$$a < \sqrt{\frac{(m+p)(mb+pc)bc}{p(n+p)b + m(m+n)c}}.$$

Da $a^2 > bc$, so ist diese Bedingung nur erfüllbar, wenn

$$(m+p)(mb+pc) > p(n+p)b + m(m+n)c,$$

$$\text{oder } [m(m+p) - p(n+p)]b > [m(m+n) - p(m+p)]c.$$

Quadrirt man die vorstehende Grenzbestimmung für a und setzt den Nenner des rechten Theils auf die linke Seite, so kommt

$$(n+p)pa^2b < (m+p)pbc^2 + [(m+p)b^2 - (m+n)a^2]mc.$$

Diese Ungleichung reducirt sich, wenn man die Bedingung für die Möglichkeit eines Maximums von c, nämlich $c < b\sqrt{\frac{n+p}{m+n}}$ einsetzt, auf $(m+n)a^2 - (m+p)b^2 < 0$,

also auf

$$a < b\sqrt{\frac{m+p}{m+n}}, \text{ oder } b > a\sqrt{\frac{m+n}{m+p}};$$

was nothwendig $p > n$ voraussetzt.

Hieraus folgt, dass, wenn b grösser ist als der grössere von den beiden Werthen $a\sqrt{\frac{m+n}{m+p}}$ und $c\sqrt{\frac{m+n}{n+p}}$, a und c zugleich Maxima ihrer Erhebung haben.

Auf ähnliche Weise findet man, dass, wenn c grösser ist als der grössere von den beiden Werthen $a\sqrt{\frac{n+p}{m+p}}$ und $b\sqrt{\frac{n+p}{m+n}}$, a und b zugleich Maxima haben.

162.

Bezeichnen wir wieder die Werthe, welche s', s'', s''' im Gleichgewicht, also für $t = \infty$ haben, mit a'', b'', c'', so ergiebt sich aus den Formeln (2) und (1) in §. 159.

$$a'' = a - \frac{q'(mb + pc)}{\lambda_2};$$
$$b'' = b - \frac{q''(mb + pc)}{\lambda_2};$$
$$c'' = c - \frac{q'''(mb + pc)}{\lambda_2}.$$

Wären a, b, c von Aussen her ins Bewusstsein getreten, so würden im Gleichgewicht ihre Reste sein

$$a - q'(mb + pc); \quad b - q''(mb + pc); \quad c - q'''(mb + pc);$$

also, da $\lambda_2 > 1$ (§. 159.), offenbar kleiner als die vorstehenden. Demnach behaupten sich drei ungleich entgegengesetzte Vorstellungen, wenn sie aus dem Innern der Seele frei aufsteigen, auf einer grössern Höhe im Bewusstsein, als wenn sie von Aussen her gegeben sind.

Ferner folgt aus den gefundenen Ausdrücken von a'', b'', c''

$$a'' - b'' = a - b + \frac{(q'' - q')(mb + pc)}{\lambda_2};$$
$$a'' - c'' = a - c + \frac{(q''' - q')(mb + pc)}{\lambda_2};$$
$$b'' - c'' = b - c + \frac{(q''' - q'')(mb + pc)}{\lambda_2}.$$

Wären die Vorstellungen von Aussen her gegeben, so würden im Gleichgewicht die Differenzen ihrer Reste bezüglich sein

$$a - b + (q'' - q')(mb + pc);$$
$$a - c + (q''' - q')(mb + pc);$$
$$b - c + (q''' - q'')(mb + pc);$$

also $\left\{\begin{matrix}\text{grösser}\\\text{kleiner}\end{matrix}\right\}$ als $a'' - b''$, $a'' - c''$, $b'' - c''$, je nachdem $q'' - q'$, $q''' - q'$, $q''' - q''$ $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$. Es ist aber

$$q'' - q' \gtrless 0, \text{ je nachdem } b \lessgtr \left(\frac{m+n}{m+p}\right) a;$$

$$q''' - q' \gtrless 0, \text{ je nachdem } c \lessgtr \left(\frac{n+p}{m+p}\right) a;$$

$$q''' - q'' \gtrless 0, \text{ je nachdem } c \lessgtr \left(\frac{n+p}{m+n}\right) b.$$

Da, wenn $q''-q'>0$ und $q'''-q''>0$, von selbst folgt $q'''-q'>0$, so ersieht man, dass die Reste der drei ungleich entgegengesetzten, gleichzeitig frei aufsteigenden Vorstellungen a, b, c der Gleichheit näher kommen als die Reste, welche von ihnen im Gleichgewicht übrig bleiben würden, wenn sie von Aussen her ins Bewusstsein träten, sofern die mittlere von ihnen, $b < \left(\frac{m+n}{m+p}\right) a$ und $> \left(\frac{m+n}{n+p}\right) c$ ist. Dies ist unabhängig von den besondern Werthen der Intensitäten und Gegensätze jederzeit der Fall, wenn $n \geqq p$ und $m \leqq p$, also der Gegensatz n zwischen den beiden schwächsten Vorstellungen am grössten, der Gegensatz m zwischen den beiden stärksten aber am kleinsten ist. Dies ist leicht begreiflich; denn die Ungleichheit der Intensitäten wird unter diesen Umständen durch die Ungleichheit der Gegensätze so viel wie möglich compensirt.

Für $q''-q'=0$ und $q'''-q''=0$ werden die Differenzen der Reste offenbar unter beiden Voraussetzungen gleich.

163.

Es fragt sich jetzt weiter, ob und unter welchen Bedingungen die Reste a'', b'', c'' Null oder negativ und damit die Vorstellungen a, b, c selbst aus dem Bewusstsein verdrängt werden können.

Stellen wir die ursprünglichen Werthe von q', q'', q''' (§. 158.) und von λ_2 (§. 159.) wieder her und setzen zur Abkürzung, wie früher, $m+p=\alpha$, $m+n=\beta$, $n+p=\gamma$, so folgt aus dem vorigen §., dass $a'' \lesseqgtr 0$ sein wird, wenn

$$a \lesseqgtr \frac{2\alpha(mb+pc)\sqrt{bc}}{\alpha\sqrt{bc}+\sqrt{\alpha^2 bc+4\alpha(mb+pc)[(1+m)\beta c+(1+p)\gamma b]}}.$$

Dieser Ausdruck ist aber $<b$ und damit, weil $a>b$, die ganze Bestimmung unmöglich, wenn

$$b\,[(1+m)\beta c+(1+p)\gamma b]+\alpha c\,(b-mb-pc)>0.$$

Dies ist aber immer der Fall. Denn restituirt man die Werthe von α, β, γ, so erhält diese Ungleichung die Form

$$(n+p+np)b^2+(n+p+mn)bc+mc[(1-p)b+(b-pc)]+p(b^2-c^2)>0,$$

wo, weil $b>c>pc$, alle Glieder positiv sind.

Es giebt also für a keinen Werth, bei dem es aus dem Bewusstsein verschwindet.

Es ist ferner $b''\gtreqless 0$, wenn

$$b\gtreqless\frac{2\beta pc}{\beta+\sqrt{\beta^2+4\beta p[(1+m)\gamma+\frac{\alpha c}{a}]}}.$$

Dieser Ausdruck ist $<c$, wenn

$$\frac{\alpha c}{a}+(1+p)\beta+(1+p)\gamma>0,$$

d. i. immer. Also hat auch b, das $>c$, keinen Werth, bei dem es aus dem Bewusstsein verschwindet.

Endlich ist $c''\gtreqless 0$, wenn

$$c\gtreqless\frac{2\gamma mb}{\gamma+\sqrt{\gamma^2+4\gamma m[(1+m)\beta+\frac{\alpha b}{a}]}}.$$

Dieser Ausdruck ist $\lesseqgtr b$, wenn

$$\frac{\alpha b}{a}+(1+m)\beta+(1-m)\gamma<0,$$

d. i. niemals. Der gefundene statische Grenzwerth der zweiten Art von c ist daher immer möglich. Es kann also c, aber auch nur dieses allein, wenn es klein genug ist, aus dem Bewusstsein verschwinden.

164.

Wir untersuchen nun weiter den Einfluss, den die Grössenverschiedenheit der Intensitäten und Gegensätze auf die Grösse des statischen Grenzwerths von c hat.

Da a für jeden beliebigen Werth von b alle Werthe von b bis ∞ haben kann, so sei zuerst $a=b$. Dann wird

$$c\gtreqless\frac{2\gamma mb}{\gamma+\sqrt{\gamma^2+4\gamma m[(1+m)\beta+\alpha]}}.$$

Sei $a=\infty$, so wird

$$c\gtreqless\frac{2\gamma mb}{\gamma+\sqrt{\gamma^2+4m(1+m)\beta\gamma}}.$$

Offenbar ist dies der grösste, so wie der für $a=b$ der kleinste aller möglichen statischen Grenzwerthe, die c für ein gegebenes

b haben kann, wenn a von b bis ins Unendliche wächst. Auch ersieht man schon aus der allgemeinen Formel des vorigen §'s, dass der Grenzwerth von c zugleich mit a wächst. Aus dieser erhellt aber auch, dass, je kleiner $\alpha = m + p$ ist, um so geringern Einfluss die Grössenverschiedenheit von a und b auf die Grösse des statischen Grenzwerths von c ausübt. Diese ist daher am meisten von der Grösse von b abhängig, der sie für $a = b$ und $a = \infty$, bei constanten Gegensätzen, direct proportional ist.

Was die Gegensätze betrifft, so sahen wir oben (§. 65.), dass für drei Vorstellungen, die aus dem ungehemmten Zustand ins Gleichgewicht übergehen, eine noch so grosse Verschiedenheit in der Grösse jener doch nicht bewirken kann, dass bei gleicher Intensität der Vorstellungen eine von den beiden andern aus dem Bewusstsein verdrängt wird. Untersuchen wir, ob dasselbe für frei aufsteigende Vorstellungen gilt. Wird nun in der Bedingungsgleichung des Verschwindens von c im vor. §. $a = b = c$ gesetzt, so erhält man

$$1 \gtreqless \frac{2\gamma m}{\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4\gamma m[(1+m)\beta + \alpha]}}.$$

Diese Bedingung reducirt sich aber auf

$$\alpha + (1+m)\beta + (1-m)\gamma \gtreqless 0,$$

was unmöglich ist. Auch für frei aufsteigende gleiche Vorstellungen ist also die Ungleichheit der Gegensätze nicht vermögend, eine der Vorstellungen aus dem Bewusstsein zu verdrängen.

Dieser Satz in Verbindung mit dem analogen früheren ist wichtig; denn er zeigt, dass Vorstellungen von der grössten Verschiedenheit der Qualität sich neben einander im Bewusstsein behaupten können, sofern nur die Ungleichheit ihrer Intensitäten unter einer gewissen Grenze bleibt.

165.

Da die in §. 159. unter (1) und (2) gefundenen Formeln für die Bewegung frei aufsteigender und ungleich entgegengesetzter Vorstellungen sich von den für gleichen Gegensatz

geltenden in §. 143. nur durch ihre zusammengesetzteren Constanten unterscheiden, im Uebrigen aber dieselbe Form haben, so ist die Zeit, in welcher ein hinlänglich schwaches c aus dem Bewusstsein verschwinden muss, durch eine ganz ähnliche Gleichung wie zu Anfange des §. 150. gegeben und erfolgt ihre Auflösung auf die nämliche Weise. Ebenso sind die Gesetze der Bewegung, welche a und b nach dem Verschwinden von c annehmen, denen analog, welche in §. 153. nachgewiesen worden sind. Auch die Uebertragung der in §. 157. für gleich entgegengesetzte Vorstellungen von der Zahl $\mu + \nu + 1$, von denen eine stärker als alle andre, die Anzahl μ von schwächeren, aber unter sich gleichen Intensitäten, endlich die Anzahl ν von noch schwächeren, aber unter sich gleichen Intensitäten angenommen wurde, auf ungleiche Gegensätze dieser drei Classen von Vorstellungen bietet keine Schwierigkeiten, aber auch keine wesentlich neuen Resultate dar.* Wir übergehen daher, um nicht zu weitläufig zu werden, die Ausführung dieser Untersuchungen; eben so auch die über das successive freie Aufsteigen von Vorstellungen, von dessen Berechnung wir anderwärts eine Probe gegeben haben,** dessen Grundannahme jedoch von keiner besondern psychologischen Bedeutung zu sein scheint. Wichtiger dagegen ist es, zu erörtern, wie sich die bisher gefundenen Bewegungsgesetze modificiren, wenn die aufsteigenden Vorstellungen zusammengesetzte sind. Es mag daher zum Schluss wenigstens für den einfachsten Fall, nämlich für zwei vollkommene Complexionen, diese Untersuchung geführt werden.

166.

Seien gegeben zwei bis dahin völlig gehemmte, von nun aber frei aufsteigende vollkommene Complexionen $a + \alpha = A$ und $b + \beta = B$, von denen die Bestandtheile a und b im Grade m, α und β aber im Grade μ entgegengesetzt sein mögen.

Sei nach der Zeit t gestiegen s' von a, σ' von α, s'' von

---

* Vgl. Herbart's psycholog. Untersuchungen Heft II. S. 93.

** S. das Programm *Quaest. math. psych. spec.* V. *p.* 18. *sq.*

b, σ'' von β; so ist, da jede Hemmung einer vollkommenen Complexion von ihren Bestandtheilen nach dem directen Verhältniss ihrer Grösse getragen wird,

$$\sigma' = \frac{\alpha s'}{a}; \quad \sigma'' = \frac{\beta s''}{b}.$$

Die HS., welche sich jetzt gebildet hat, ist, wenn $a > b$ und zugleich $\alpha > \beta$,

$$ms'' + \mu\sigma'' = \frac{(mb + \mu\beta)}{b} s'';$$

wenn aber $a > b$ und $\alpha < \beta$,

$$ms'' + \mu\sigma' = \frac{mas'' + \mu\alpha s'}{a}.$$

Sei erstens HS. $= \frac{(mb + \mu\beta) s''}{b}$, so vertheilt sich diese (§. 77.) auf A und B dergestalt, dass davon der Bruchtheil $\frac{B}{A+B}$ auf A, und der Bruchtheil $\frac{A}{A+B}$ auf B kommt. Setzen wir nun zur Abkürzung

$$s' + \sigma' = \frac{As'}{a} = \Sigma' \text{ und } s'' + \sigma'' = \frac{Bs''}{b} = \Sigma'',$$

so ist

$$\frac{d\Sigma'}{dt} = A - \Sigma' - \left(\frac{mb + \mu\beta}{b}\right)\frac{B}{A+B}.s'';$$

$$\frac{d\Sigma''}{dt} = B - \Sigma'' - \left(\frac{mb + \mu\beta}{b}\right)\frac{A}{A+B}.s'';$$

oder, wenn für s'' der Werth $\frac{b\Sigma''}{B}$ eingeführt und

$$1 + \frac{(mb + \mu\beta) A}{(A+B) B} = K$$

gesetzt wird,

$$\frac{d\Sigma'}{dt} = A - \Sigma' - (K-1)\frac{B}{A}.\Sigma'';$$

$$\frac{d\Sigma''}{dt} = B - K\Sigma''.$$

Die zweite dieser Gleichungen giebt sofort

$$\Sigma'' = \frac{B}{K}(1 - e^{-Kt});$$

daher

$$s'' = \frac{b}{K}(1 - e^{-Kt});$$

$$\sigma'' = \frac{\beta}{K}(1 - e^{-Kt}).$$

Die erste Differentialgleichung führt, auf die Form

$$d\Sigma' + \Sigma' dt = [A - (K-1)\frac{B}{A}\Sigma''] dt$$

gebracht, zu dem Integral

$$\Sigma' = e^{-t}\int [A - (K-1)\frac{B}{A}\Sigma''] e^t dt.$$

Setzt man hierin für Σ'' seinen zuvor gefundenen Ausdruck, so wird

$$\Sigma' = \left(A - \frac{B^2}{A}\right)(1 - e^{-t}) + \frac{B^2}{KA}(1 - e^{-Kt});$$

woraus

$$s' = \left(a - \frac{aB^2}{A^2}\right)(1 - e^{-t}) + \frac{aB^2}{KA^2}(1 - e^{-Kt});$$

$$\sigma' = \left(\alpha - \frac{\alpha B^2}{A^2}\right)(1 - e^{-t}) + \frac{\alpha B^2}{KA^2}(1 - e^{-Kt}).$$

Vergleicht man vorstehende, für die Erhebungen Σ', Σ'' von A, B erhaltene Formeln mit denen, welche in §. 140. für die Erhebungen s', s'' der einfachen Vorstellungen a, b gefunden worden sind, so zeigt sich, dass die Complexionen A, B sich genau so erheben, als ob sie zwei einfache im Grade $\frac{mb + \mu\beta}{b + \beta}$ entgegengesetzte Vorstellungen wären. Diese Analogie zwischen vollkommenen Complexionen und einfachen Vorstellungen ist die natürliche Folge der früher (§. 78, 1.) aufgefundenen Analogie zwischen den ihnen im Gleichgewicht zukommenden Hemmungen. Vermöge derselben gelten nun auch die in §. 141 f. für einfache Vorstellungen gewonnenen Resultate in Bezug auf vollkommene Complexionen, bei denen beide Bestandtheile der einen grösser sind als die gleichnamigen der andern.

Bei ähnlichen Complexionen, für welche (§. 79, 2.) $a : \alpha = b : \beta$, und $m = \mu$ ist, wird $K = 1 + \frac{ma}{a + b} = k$ (§. 140.), zugleich auch $= 1 + \frac{\mu\alpha}{\alpha + \beta}$. Hierdurch gehen die vorstehenden Ausdrücke für s' und s'', σ' und σ'' in Formeln über, die bezüglich für frei aufsteigende einfache und uncomplicirte Vorstellungen a und b, α und β gelten. Die Bestandtheile ähnlicher Complexionen erheben sich also ganz so, wie es geschehen würde, wenn sie mit einander nicht complicirt wären.

167.

Weniger einfache Resultate erhält man, wenn zweitens

$$\text{HS.} = \frac{mas'' + \mu\alpha s'}{a}.$$

Bezeichnen wir die Bruchtheile $\frac{B}{A + B}$, $\frac{A}{A + B}$, welche von ihr

bezüglich auf A und B kommen, durch Q', Q'', so ergiebt sich zuvörderst

$$\frac{d\Sigma'}{dt} = A - \Sigma' - Q'\left(\frac{mas'' + \mu\alpha s'}{a}\right);$$

$$\frac{d\Sigma''}{dt} = B - \Sigma'' - Q''\left(\frac{mas'' + \mu\alpha s'}{a}\right);$$

woraus, wenn wir $s' = \frac{a}{A}\Sigma'$, $s'' = \frac{b}{B}\Sigma''$ einführen, und $\frac{\mu\alpha}{A} = h'$, $\frac{mb}{B} = h''$ setzen, wird

$$\frac{d\Sigma'}{dt} = A - (1 + h'Q')\Sigma' - h''Q'\Sigma'';$$

$$\frac{d\Sigma''}{dt} = B - (1 + h''Q'')\Sigma'' - h'Q''\Sigma'.$$

Multiplicirt man die zweite dieser Gleichungen mit dem unbestimmten Coëfficienten $\mathfrak{J}$, addirt das Product zu der ersten, und transponirt dt auf die rechte Seite des Gleichheitszeichens, so folgt

$$d\Sigma' + \mathfrak{J}d\Sigma'' = \left\{A + B\mathfrak{J} - (1 + h'Q' + h'Q''\mathfrak{J})\Sigma' + [(1 + h'Q')\mathfrak{J} + h''Q']\Sigma''\right\}dt.$$

Setzt man nun $\Sigma' + \mathfrak{J}\Sigma'' = U$, so wird

$$dU = \left\{A + B\mathfrak{J} - (1 + h'Q' + h'Q''\mathfrak{J})U + [(1 + h'Q' + h'Q''\mathfrak{J})\mathfrak{J} - (1 + h''Q'')\mathfrak{J} - h''Q']\right\}dt.$$

Wird nun zur Bestimmung von $\mathfrak{J}$ der Inhalt der in der letzteren Formel enthaltenen Parenthese $[\,] = 0$ gesetzt, so ergiebt sich die quadratische Gleichung

$$\mathfrak{J}^2 - \left(\frac{h''Q'' - h'Q'}{h'Q''}\right)\mathfrak{J} = \frac{h''Q'}{h'Q''},$$

deren Wurzeln sind

$$\mathfrak{J}_1 = \frac{h''}{h'}, \quad \mathfrak{J}_2 = -\frac{Q'}{Q''}.$$

Sei nun $1 + h'Q' + h''Q'' = K_1$ und für $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_1$, $dU = dU_1$, für $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_2$, $dU = dU_2$, so findet sich leicht, dass

$$dU_1 = \left(A + \frac{h''B}{h'} - K_1 U_1\right)dt;$$

$$dU_2 = \left(A - \frac{Q'B}{Q''} - U_2\right)dt.$$

Integrirt man diese Differentialformeln, so ergiebt sich

$$U_1 = \left(\frac{h'A + h''B}{h'K_1}\right)(1 - e^{-K_1 t});$$

$$U_2 = \left(\frac{Q''A - Q'B}{Q''}\right)(1 - e^{-t}).$$

Nach der Bedeutung von U ist aber zugleich

$$U_1 = \Sigma' + \frac{h''}{h'}\Sigma''; \quad U_2 = \Sigma' - \frac{Q'}{Q''}\Sigma''.$$

Hieraus erhält man endlich

$$\Sigma' = \frac{h''(Q''A-Q'B)}{K_1-1}(1-e^{-t}) + \frac{Q'(h'A+h''B)}{K_1(K_1-1)}(1-e^{-K_1t});$$

$$\Sigma'' = -\frac{h'(Q''A-Q'B)}{K_1-1}(1-e^{-t}) + \frac{Q''(h'A+h''B)}{K_1(K_1-1)}(1-e^{-K_1t}).$$

Mittels der Gleichungen

$$s' = \frac{a}{A}\Sigma', \quad \sigma' = \frac{\alpha}{A}\Sigma', \quad s'' = \frac{b}{B}\Sigma'', \quad \sigma'' = \frac{\beta}{B}\Sigma''$$

folgen von selbst die Formeln, in welchen sich die Bewegungen der einzelnen Bestandtheile a und α, b und β der Complexionen A, B ausdrücken.

Will man endlich noch sämmtliche in den Formeln für Σ' und Σ'' enthaltene Constanten auf die ursprünglich gegebenen Grössen zurückführen, so findet man

$$K_1 = \frac{A^2(B+mb)+B^2(A+\mu\alpha)}{AB(A+B)};$$

$$\frac{h''(Q''A-Q'B)}{K_1-1} = \frac{mbA(A^2-B^2)}{mbA^2+\mu\alpha B^2};$$

$$\frac{Q'(h'A+h''B)}{K_1(K_1-1)} = \frac{A^2B^3(A+B)mb+\mu\alpha)}{(mbA^2+\mu\alpha B^2)[A^2(B+mb)+B^2(A+\mu\alpha)]};$$

$$\frac{-h'(Q''A-Q'B)}{K_1-1} = \frac{-\mu\alpha B(A^2-B^2)}{mbA^2+\mu\alpha B^2};$$

$$\frac{Q''(h'A+h''B)}{K_1(K_1-1)} = \frac{A^3B^2(A+B)(mb+\mu\alpha)}{(mbA^2+\mu\alpha B^2)[A^2(B+mb)+B^2(A+\mu\alpha)]}.$$

168.

Setzen wir für $t=\infty$, also für das Gleichgewicht der Complexionen, $\Sigma' = A'$, $\Sigma'' = B'$, so ergiebt sich

$$A' = A - \frac{Q'}{K_1}(h'A+h''B) = A - \frac{Q'}{K_1}(mb+\mu\alpha);$$

$$B' = B - \frac{Q''}{K_1}(h'A+h''B) = B - \frac{Q''}{K_1}(mb+\mu\alpha).$$

Wären dieselben Complexionen durch Sinken ins Gleichgewicht gekommen, so würden ihre Reste bezüglich sein

$$A - Q'(mb+\mu\alpha) \text{ und } B - Q''(mb+\mu\alpha),$$

also offenbar, da $K_1 > 1$, kleiner als A' und B', und zwar um so mehr, je grösser K_1. Hieraus folgt

$$A'-B' = A-B+\left(\frac{Q''-Q'}{K_1}\right)(mb+\mu\alpha);$$

$$= A-B+\frac{1}{K_1}\left(\frac{A-B}{A+B}\right)(mb+\mu\alpha);$$

indess für den andern Fall die Differenz ihrer Reste sein würde

$$A - B + \left(\frac{A-B}{A+B}\right)(mb + \mu\alpha),$$

also grösser als $A' - B'$. Es gelten also auch, wenn $a > b$, aber $\alpha < \beta$ die in §. 141. für zwei einfache Vorstellungen erwiesenen Sätze von vollkommenen Complexionen.

Die Differentiation der Formeln für Σ', Σ'' giebt

$$\frac{d\Sigma'}{dt} = \frac{h''(Q''A - Q'B)}{K_1 - 1} e^{-t} + \frac{Q'(h'A + h''B)}{K_1 - 1} e^{-K_1 t};$$

$$\frac{d\Sigma''}{dt} = -\frac{h'(Q''A - Q'B)}{K_1 - 1} e^{-t} + \frac{Q''(h'A + h''B)}{K_1 - 1} e^{-K_1 t}.$$

Setzt man diese Ausdrücke $= 0$, so erhält man für den ersten einen imaginären Werth, für den zweiten aber

$$t = \frac{1}{K_1 - 1} \lg n \frac{Q''(h'A + h''B)}{h'(Q''A - Q'B)},$$

$$= \frac{1}{K_1 - 1} \lg n \frac{A^2(mb + \mu\alpha)}{(A^2 - B^2)\mu\alpha};$$

welcher Werth also ein Maximum der Erhebung von Σ' anzeigt. Bestimmt man den zweiten Differentialquotienten von Σ' nach t und setzt ihn $= 0$, so kommt

$$t = \frac{1}{K_1 - 1} \lg n \left\{\frac{Q''(h'A + h''B)}{h'(Q''A - Q'B)} + K_1\right\},$$

$$= \frac{1}{K_1 - 1} \lg n \left\{\frac{A^2(mb + \mu\alpha)}{(A^2 - B^2)\mu\alpha} + K_1\right\};$$

wodurch die Zeit des Wendepunkts der Curve für Σ' bestimmt ist. Maximum und Wendepunkt kommen in Wegfall, wenn $A = B$. Dann wird aber auch einfacher

$$\Sigma' = \frac{A}{K_1}(1 - e^{-K_1 t}) = \Sigma'', \text{ und } K_1 = 1 + \frac{mb + \mu\alpha}{2A}.$$

169.

Zur Erläuterung der Formeln der vorigen §§. mögen noch einige Beispiele folgen. Wir wählen absichtlich solche, die schon Herbart* gebraucht hat, um dadurch die Vergleichung zu erleichtern.

1. Sei $a = 10$, $\alpha = 2$, also $A = 12$; $b = 1$, $\beta = 3$, also $B = 4$; $m = 1$; $\mu = 0{,}04$;

---

* Psychologische Untersuchungen Heft II. S. 150 ff.

so wird $Q' = \frac{1}{4}$; $Q'' = \frac{3}{4}$; $h' = \frac{0{,}02}{3}$; $h'' = \frac{1}{4}$;

daher
$$K_1 = 1 + \frac{227}{1200} = 1{,}18916.^*$$
Hieraus folgt
$$\Sigma' = 10{,}574\,(1 - e^{-t}) + 1{,}200\,(1 - e^{-1{,}189.t}),$$
$$\Sigma'' = -0{,}282\,(1 - e^{-t}) + 3{,}601\,(1 - e^{-1{,}189.t});$$
daher für $t = \infty$, also im Gleichgewicht,
$$A' = 11{,}774; \quad B' = 3{,}319;$$
wovon 9,812 auf a, 1,962 auf α, 0,830 auf b, 2,489 auf β kommt.

Wären dieselben Complexionen aus dem ungehemmten Zustand ins Gleichgewicht gekommen, so würde sein
$$\text{Rest von } A = 11{,}742, \quad \text{Rest von } B = 3{,}193,$$
wovon 9,785 auf a, 1,957 auf α, 0,798 auf b, 2,395 auf β käme. Der Unterschied ist hier also nicht sehr beträchtlich.

Wären a und b, α und β uncomplicirt aufgestiegen, so würde im Gleichgewicht sein
$$\text{Rest von } a = 9{,}952, \quad \text{Rest von } \alpha = 1{,}953,$$
$$\text{Rest von } b = 0{,}524, \quad \text{Rest von } \beta = 2{,}875.$$
Man sieht, wie die stärkeren Vorstellungen auch hier durch die Complication gewinnen, die schwächeren verlieren.

Die Zeit, für welche die Erhebung von B ein Maximum, ist
$$t = \frac{1}{0{,}189} \lg n \frac{4282}{282} = 14{,}39.$$
Für diesen Werth von t würde $e^{-t} = 0{,}00000075$, $e^{-1{,}189.t}$ natürlich noch kleiner werden. Bestimmen wir daher Σ'' nur bis auf drei Decimalstellen, so kommen diese Werthe ganz in Wegfall, und wird $\Sigma' = A'$, $\Sigma'' = B'$, d. i. der Stand der Vorstellungen in dem Zeitpunkt, wo Σ' sein Maximum hat, ist von dem im Gleichgewicht nicht mehr merklich verschieden. Ueberhaupt ist, wenn $t > 9{,}22$, e^{-t} und also noch mehr $e^{-K_1 t} < 0{,}0001$, also ohne Einfluss auf die dritte Decimalstelle. Sind also die Coëfficienten von $1 - e^{-t}$ und $1 - e^{-K_1 t}$ nicht grösser als 10, so werden die Werthe von Σ', Σ'', die zur Zeit des Maximums der Erhebung von B gehören, bis auf drei Decimalen mit denen für das Gleichgewicht zusammenstimmen.

* Dieser Werth muss zur richtigen Berechnung der Coëfficienten in Σ', Σ'' scharf bestimmt werden.

2. Sei $a = 7$, $\alpha = 1$, also $A = 8$; $b = 2$, $\beta = 3$, also $B = 5$; $m = 0{,}1$; $\mu = 1$;

so wird $Q' = \frac{5}{13}$, $Q'' = \frac{8}{13}$, $h' = \frac{1}{8}$, $h'' = \frac{1}{25}$;

daher $K_1 = 1{,}07269$.

Hieraus folgt

$$\Sigma' = 1{,}651\,(1 - e^{-t}) + 5{,}919\,(1 - e^{-1{,}073 \cdot t});$$

$$\Sigma'' = -5{,}159\,(1 - e^{-t}) + 9{,}470\,(1 - e^{-1{,}073 \cdot t});$$

daher $A' = 7{,}570$, $B' = 4{,}311$,

wovon 6,624 auf a, 0,946 auf α, 1,724 auf b, 2,587 auf β kommt.

Wären dieselben Complexionen Anfangs ungehemmt gewesen und dann ins Gleichgewicht gekommen, so würde sein

Rest von $A = 7{,}538$, Rest von $B = 4{,}262$.

Davon käme

6,596 auf a, 0,942 auf α, 1,705 auf b, 2,557 auf β;

Werthe, die nur wenig niedriger sind als die vorigen.

Wären a und b, α und β uncomplicirt aufgestiegen, so würde sein

Rest von $a = 6{,}959$, Rest von $\alpha = 0{,}571$,
Rest von $b = 1{,}856$, Rest von $\beta = 2{,}857$.

Hier gewinnt also durch die Complication die einzige Vorstellung α. Auffallend ist, dass auch b, der schwächere Bestandtheil von B, verliert. Dies erklärt sich aber daraus, dass b, wenn es mit β nicht complicirt ist, bei seinem schwachen Gegensatz zu a weniger zu tragen hat als in der Complexion, wo es den zehnmal so starken Gegensatz zwischen α und β mit übertragen muss.

Das Maximum der Erhebung von B trifft auf die Zeit

$$t = \frac{1}{0{,}07269} \lg n \frac{10161}{5159} = 9{,}285.$$

Die zugehörigen Werthe von Σ' und Σ'' unterscheiden sich also nicht mehr merklich von A', B'.

3 Sei $a = 990$, $\alpha = 10$, also $A = 1000$; $b = 12$, $\beta = 11$, also $B = 23$; $m = \mu = 1$;

so wird $Q' = \frac{23}{1023}$, $Q'' = \frac{1000}{1023}$, $h' = \frac{1}{100}$, $h'' = \frac{12}{23}$;

daher $K_1 = 1{,}51023$.

Hieraus folgt

$$\Sigma' = 999{,}031\,(1-e^{-t}) + 0{,}642\,(1-e^{-1{,}510.t});$$
$$\Sigma'' = -19{,}148\,(1-e^{-t}) + 27{,}908\,(1-e^{-1{,}510.t});$$

daher $A' = 999{,}673$, $B' = 8{,}760$,

wovon 989,676 auf a, 9,997 auf α, 4,570 auf b, 4,190 auf β kommt.

Wären dieselben Complexionen ungehemmt zusammengetroffen und ins Gleichgewicht gesunken, so würde sein

Rest von $A = 999{,}483$, Rest von $B = 0{,}517$.

Davon käme

989,488 auf a, 9,995 auf α, 0,270 auf b, 0,247 auf β.

Hier also halten sich b und β beim freien Aufsteigen auf einer viel grössern Höhe.

Das Maximum der Erhebung von B fällt auf

$$t = \frac{1}{0{,}51023} \lg n \frac{42141}{19148} = 1{,}546.$$

Für diesen Werth ist

$$\Sigma' = 786{,}740; \quad \Sigma'' = 10{,}137.$$

Der Wendepunkt der Curve für Σ'' fällt auf $t = 2{,}354$, wo

$$\Sigma' = 904{,}754; \quad \Sigma'' = 9{,}781.$$

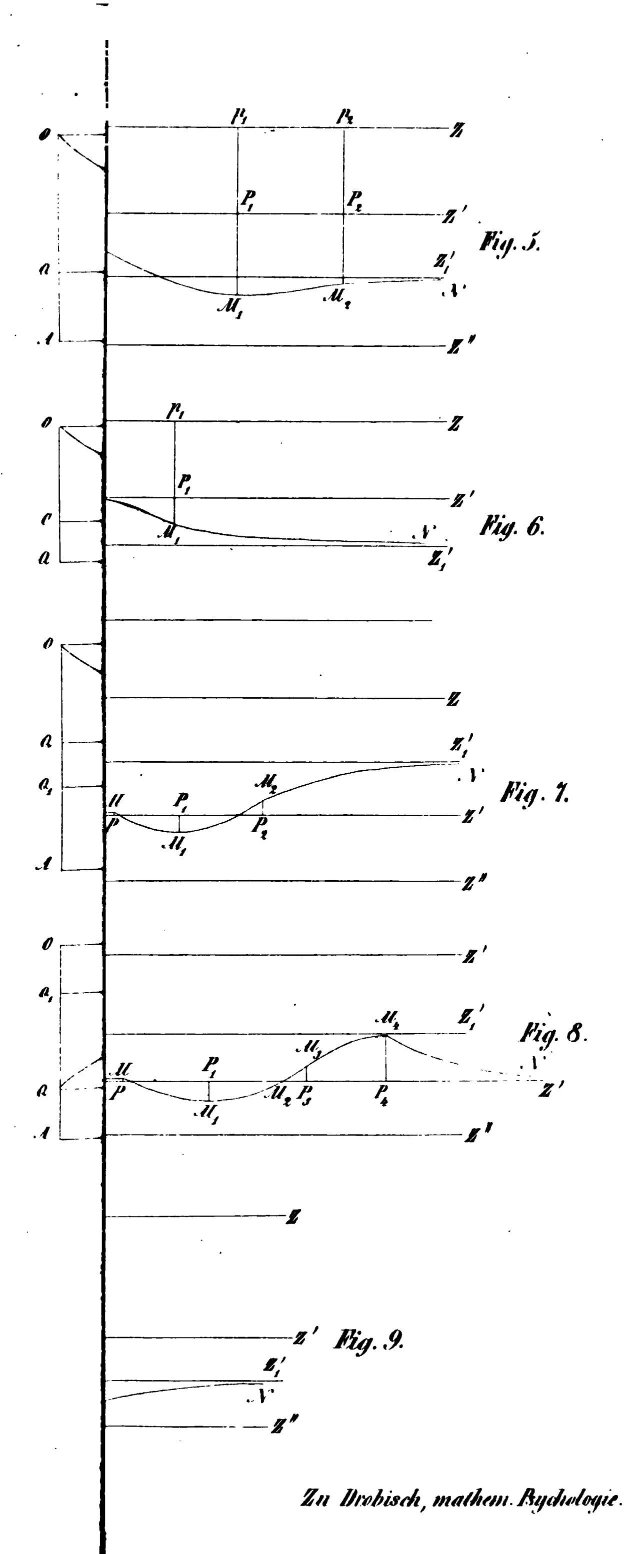
Hier also ist die rückgängige Bewegung von B allerdings bemerklich.

170.

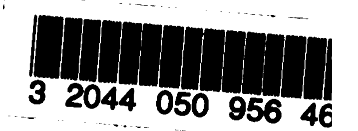
Das Vorstehende mag wenigstens als eine Probe von der Berechnung des freien Aufsteigens zusammengesetzter Vorstellungen gelten. Es macht keine Schwierigkeit, die Rechnung auf drei vollkommene Complexionen auszudehnen, nur wird die Untersuchung, wenn die wesentlich verschiedenen Fälle gehörige Berücksichtigung finden sollen, etwas weitläufig. Noch umständlicher und zum Theil, wegen der nöthigen Hülfssätze, noch nicht am rechten Platze würde die Betrachtung des Steigens der unvollkommenen Complexionen und Verschmelzungen sein. Herbart hat hierzu bereits schätzbare Vorarbeiten geliefert, die sich jedoch, wenn unsre Theorie der Complexionen und Verschmelzungen richtig ist, modificiren werden. In der Abweichung dieser unsrer Theorie von der Herbart'schen liegt auch der Grund davon, dass bei übereinstimmenden all-

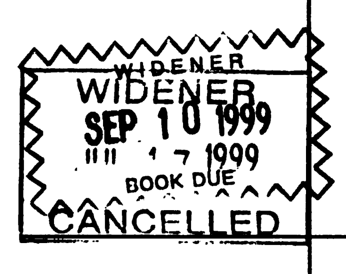
gemeinen Formeln für das Aufsteigen von zwei vollkommenen Complexionen doch in den beiden ersten der vorstehenden Beispiele andre numerische Resultate erhalten werden als die, zu welchen Herbart gelangt. Im dritten Beispiel findet nur deshalb Einstimmung statt, weil bei vollen Gegensätzen der Bestandtheile vollkommener Complexionen unsre Ausdrücke für die Hemmungen im Gleichgewicht von denen Herbart's nicht mehr abweichen.

Druck von F. A. Brockhaus in Leipzig.


Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Zu Drobisch, mathem. Psychologie.




3 2044 050 956 46


WIDENER
WIDENER
SEP 10 1999
1999
BOOK DUE
CANCELLED



